PROCESOS ESTOCÁSTICOS APLICADOS A LA HIDROLOGÍA

Profesor: Efraín Antonio Domínguez Calle, PhD.

e-mail: edoc@mathmodelling.org

http://www.mathmodelling.org/hidroestocastica

I SEMESTRE DE 2011

INTRODUCCIÓN Y ALGUNAS NOCIONES SOBRE MAGNITUDES ALEATORIAS

La Teoría de Funciones Aleatorias es un componente de la teoría de probabilidades que se esta desarrollando muy rápidamente y ha encontrado aplicaciones en distintos dominios técnicos y científicos con avances muy importantes en comunicaciones, teoría del control automático, aeronáutica, etc.

En las últimas décadas, se han adelantado aplicaciones de la teoría de funciones aleatorias en meteorología, oceanología e hidrología. El principal objetivo de estas aplicaciones se concentra en la determinación y pronóstico de valores para las variables de estado que caracterizan procesos y/o campos aleatorios hidrometeorológicos. Para lograrlo, el principal enfoque consiste en considerar las observaciones de variables hidrometeorológicas como "realizaciones" de un determinado proceso o campo aleatorio. Este enfoque evita concentrarse en magnitudes instantáneas que dependen de las coordenadas espaciales y del tiempo en forma compleja y permite concentrarse en el estudio de las características estadísticas de sus realizaciones espacio temporales.

En el campo de la hidrología y la meteorología se reportan aplicaciones exitosas de la teoría de funciones aleatorias para la descripción del fenómeno de la turbulencia, para el pronóstico cuantitativo del tiempo, la descripción objetiva de campos meteorológicos e hidrológicos y para el diseño óptimo de sistemas de monitoreo hidrometeorológico.

La noción básica de la teoría de probabilidades es la de *Magnitud Aleatoria*. Por magnitud aleatoria se entiende aquella que como resultado de su medición bajo las mismas circunstancias puede tomar distintos valores, los cuales pueden ocurrir en un orden impredecible. Se distinguen magnitudes aleatorias de tipo discreto y continuo. Las discretas no ocupan todo el eje numérico que las contiene mientras que las continuas sí. Usualmente, en calidad de magnitudes aleatorias continuas se suelen reportar variables cuyos valores pueden ocupar un intervalo completo del conjunto de los números reales . $(\Re)$, como ejemplo se pueden enumerar, la temperatura del aire, la presión atmosférica, los niveles del agua en un reservorio, los caudales de un río, etc.

Es conveniente mantener una convención en la que las magnitudes aleatorias se representen por letras mayúsculas de los alfabetos griego y latino $(A, B, C, \ldots, Z; A, B, \Gamma, \ldots \Omega)$, mientras que sus posibles valores se expresen a través de sus equivalentes en minúsculas $(a, b, c, \ldots, z; \alpha, \beta, gamma, \ldots, \omega)$. Para representar magnitudes aleatorias, en calidad de característica universal, se utilizan sus leyes integrales de distribución, también conocidas como funciones de distribución $F(x)$. La *función de distribución* de una magnitud aleatoria se define como la probabilidad de que, la magnitud aleatoria tome un valor menor que un valor predeterminado x :

$$F(x)=P(X<x) \quad ;$$

Ecuación 1

Donde: $P(X<x)$ significa la probabilidad de que X sea menor que x . $F(x)$ es una función monótona creciente, lo que significa que si $x_2>x_1$ entonces tienen lugar: $F(x_2)\geq F(x_1)$. También será valido: $F(-\infty)=0$ y $F(+\infty)=1$.

Para las magnitudes aleatorias continuas cuya función de distribución sea diferenciable, en calidad de característica general se puede utilizar la derivada de su función de distribución:

$$F'(x)=f(x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

Ecuación 2

$f(x)$ es la ley diferencial de distribución y también se conoce como *Curva de Densidad Probabilística*. Esta densidad de distribución, siendo la derivada de la función monótona creciente $F(x)$, es una función no negativa para todo x ($f(x)\geq 0\,\forall\, x$) .

La función de distribución se expresa a través de la curva de densidad probabilística en forma de la integral:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

Ecuación 3

e-mail: edoc@mathmodelling.org

Dado que $F(+\infty)=1$, entonces para la curva de densidad probabilística $f(x)$ se cumple $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$.

De los párrafos anteriores se deduce que la función de distribución $F(x)$ y la curva de densidad probabilística $f(x)$ se pueden representar una a través de la otra y viceversa, en consecuencia ambas en forma exhaustiva caracterizan magnitudes aleatorias. Aunque la curva de densidad probabilística $f(x)$ sea la representación completa de una magnitud aleatoria, no todo el tiempo es posible definirla y por ello, frecuentemente, para describir magnitudes aleatorias se utilizan otras características numéricas que representan características particulares de las magnitudes aleatorias. En calidad de tales características se utilizan los *momentos estadísticos de distinto orden* de las magnitudes aleatorias. Se distinguen *momentos estadísticos al origen* y *momentos estadísticos centrales*.

Un momento estadístico, al origen, de orden k , para la magnitud aleatoria discreta X se representa como la suma:

$$m_k[X]=\sum_{-\infty}^{+\infty} x_i^k p_i \quad ,$$

Ecuación 4:

Donde x_i representan todos los posibles valores de la magnitud aleatoria X y p_i son sus probabilidades correspondientes. Si la magnitud aleatoria tiene un conjunto infinito de posibles valores x_i , es necesario garantizar que la suma de la Ecuación 4 sea convergente (es decir que no tienda a $\pm\infty$).

Para una magnitud aleatoria continua la suma sobre valores discretos x_i es sustituida por la integración de todos los valores x y la probabilidad p_i se rempleza con los elementos de probabilidad $f(x)dx$. De este modo, para una magnitud aleatoria continua su momento estadístico, al origen, de orden k es:

$$m_k[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,dx$$

Ecuación 5:

El primer momento al origen $m_1[X]$ se denomina Esperanza Matemática de la magnitud aleatoria X y se representa cómo $M[X]$ ó m_x. Para una magnitud aleatoria discreta este momento al origen es igual a:

$$M[X]=\sum_{-\infty}^{+\infty} x_i p_i$$

Ecuación 6:

Para una magnitud aleatoria continua será:

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx \quad .$$

Ecuación 7:

El momento estadístico, al origen, de orden $k-esimo$ es la esperanza matemática de orden $k-esimo$ para la respectiva magnitud aleatoria:

$$m_k[X]=M[X^k] \quad .$$

Ecuación 8:

La desviación de la magnitud aleatoria X con respecto a su esperanza matemática se llama magnitud aleastoria centralizada y se representa como:

$$\mathring{X}=X-m_x$$

Ecuación 9:

El momento central μ_k de orden k para una magnitud aleatoria X es el momento al origen de orden k para la magnitud aleatoria centralizada $\overset{\circ}{X}$:

$$\mu_k[X]=m_k[\overset{\circ}{X}]=M[\overset{\circ}{X}^k]=M[(X-m_x)^k] \quad .$$

Ecuación 10:

El momento central de orden k es la esperanza matemática de orden k de la magnitud aleatoria centralizada. Para una magnitud aleatoria discreta se tiene:

$$\mu_k[X]=\sum_{-\infty}^{+\infty}(x_i-m_x)^k p_i$$

Ecuación 11

Para una magnitud aleatoria continua:

$$\mu_k[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)^k f(x)\,dx$$

Ecuación 12

El momento central de primer orden siempre es igual a cero. Los momentos estadísticos al origen están referenciados con relación a la posición del eje de las ordenadas mientras que los momentos estadísticos centrales están referenciados con respecto al centro de gravedad de la curva de densidad probabilística.

El momento central de segundo orden $(k=2)$ se denomina varianza de la magnitud aleatoria y se simboliza con $D(X)$ o D_x :

$$D_x = \mu_2[X] = M[(X - m_x)^2]$$

Ecuación 13

La varianza es la esperanza matemática de los cuadrados de las desviaciones con respecto a la esperanza matemática. Para una magnitud aleatoria discreta la varianza es:

$$D_x = \sum_i (x_i - m_x)^2 p_i$$

Ecuación 14

Para una magnitud aleatoria continua será:

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x)\, dx$$

Ecuación 15

La varianza de la magnitud aleatoria es una medida de su dispersión. Caracteriza la desviación de la magnitud alrededor de su esperanza matemática. La varianza tiene dimensionalidad cuadrática, para darle dimensionalidad comparable con la de la magnitud aleatoria, se utiliza la desviación cuadrática estándar que es igual a la raíz cuadrada de la varianza y la simbolizan como:

$$\sigma[X] = \sigma_x = \sqrt{(D_x)}$$

Ecuación 16

El tercer momento central caracteriza la asimetría en la distribución probabilística de la magnitud aleatoria. Si la curva de densidad probabilística es asimétrica en relación a la posición de la esperanza matemática todos sus momentos estadísticos de orden impar serán nulos. Para caracterizar la asimetría se utiliza el primer momento central de orden impar no nulo, es decir μ_3 . Con el fin de caracterizar la asimetría en forma adimensional se utiliza el coeficiente de asimetría c_s :

$$c_s = \frac{\mu_3}{\sigma_x}$$

Ecuación 17

El cuarto momento central caracteriza el apuntalamiento de la curva de densidad de distribución probabilística y se caracteriza a través del Exceso:

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

Ecuación 18

Para la distribución normal $\frac{\mu_4}{\sigma^4}$, es decir que su exceso es nulo. Para distribuciones con mayor apuntalamiento que el de la distribución normal $E>0$, para las más achatadas que la distribución normal $E<0$.

Entre los momentos estadísticos centrales y los momentos estadísticos al origen existe la siguiente correspondencia:

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2$$

Ecuación 19

$$\mu_3 = m_3 - 3\mathrm{m}_2 m_1 + 2\mathrm{m}_1^3$$

Ecuación 20

$$\mu_4 = m_4 - 4\mathrm{m}_3 m_1 + 6\mathrm{m}_2 m_1 - 3\mathrm{m}_1^4$$

Ecuación 21

La Ecuación 19 resulta cómoda para el calcula de la varianza. A su vez la Ecuación 20 y la Ecuación 21 son útiles para el cálculo de la asimetría y del exceso.

Desde el punto de vista hidrometeorológico, variables cómo la temperatura del aire, la presión atmosférica, la nubosidad, la humedad, las componentes vectoriales de la velocidad las precipitaciones y los caudales pueden ser consideradas como variables aleatorias. Por lo menos, en su agregación/ponderación anual se demuestra frecuentemente que estas componen conjuntos estadísticos validos y que por ello las mencionadas variables pueden ser descritas con sus leyes de distribución probabilística.

En la práctica es usual encontrar que las magnitudes aleatorias tengan una curva de densidad probabilística del tipo:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{(s\pi)}}\mathrm{e}^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Ecuación 22:

Muchos procesos naturales y técnicos son el resultado de una compleja interacción entre variables aleatorias. Si la variable de estado de uno de estos procesos es el resultado de la suma de todas las demás variables aleatorias, cada una de las cuales puede seguir una determinada ley de distribución distinta a la normal, y sí cada una de estas variables tienen una contribución no significativa en la suma general de variables aleatorias, entonces, independientemente del tipo de distribuciones que los sumandos sigan, su sumatoría estará distribuida según la distribución normal. La ley de distribución normal es simétrica y tiene su máximo de densidad probabilística en el punto:

$$x=m$$

y es igual a:

$$1/\sigma\sqrt{(s\pi)}\ .$$

Para la distribución normal la asimetría yn el exceso son iguales a:

$\mu_3=0$ y $\mu=3\sigma^4$.

Muchos sistema complejos están condicionados por una gran cantidad de factores aleatorios. La descripción exhaustiva de estos sistemas requiere no solo de las leyes de distribución de cada uno de los factores aleatorios que afectan al sistema sino también de las interrelaciones entre estos factores. Un sistema de n variables aleatorias $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ se puede interpretar, geométricamente, como las coordenadas de un punto aleatorio en un espacio n - dimensional o lo que es lo mismo como un vector aleatorio n - dimensional. Cómo característica exhaustiva del sistema $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ se utiliza la función de distribución n - dimensional $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=P(X_1<x_1, X_2<x_2, \ldots, X_n<x_n)$, que define la probabilidad de que conjuntamente $X_i<x_i$ para todo $i=1,2,\ldots,n$. Esta función de distribución multivariada es una función no decreciente de sus argumentos . Dado que $X_i<-\infty$ es un evento imposible, entonces cada vez que uno de los argumentos de $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tiende a infinito, el valor de la función de distribución tiende a cero.

Dado que el evento $X_i<+\infty$ es un evento cierto o seguro, para construir la función de distribución del subsitema $(X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, X_n)$ sólo se necesita suponer que los argumentos $(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$ se igualan a $+\infty$. Cómo caso particular, para obtener la función de distribución marginal de X_j hay que poner todos los argumentos x_i , con $i\neq j$, iguales a $+\infty$.

Si para un sistema de magnitudes aleatorias existe todas las derivadas cruzadas de la función de distribución, tomadas para cada uno de los argumentos de $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces la densidad de distribución de probabilidades $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se define cómo:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}$$

Ecuación 23:

La función de distribución también puede ser expresada a través de la densidad de probabilidades de la siguiente forma:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(-\infty < X_1 < x_1, -\infty < X_2 < x_2, \ldots, -\infty < X_n < x_n) = \\ = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

Ecuación 24:

Si se conoce la densidad de probabilidades n - dimensional también se puede definir la densidad probabilística k - dimensional con $(k < m < n)$ de la siguiente forma:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_{k+1}\, dx_{k+2} \ldots dx_n$$

Ecuación 25:

En particular, para definir la densidad de distribución marginal para la magnitud aleatoria X_j se debe integrar la densidad de distribución del sistema tomando como limites de integración de $-\infty$ a $+\infty$ para todos los argumentos $x_i \forall i \neq j$.

Para caracterizar la dependencia entre todos los factores aleatorios que influyen sobre el sistema de variables aleatorias se utilizan las funciones de distribución condicionadas. La función de distribución de un subsistema $(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k})$ se llama a la función de distribución construida bajo la suposición de que las magnitudes aleatorias restantes ya tomaron unos valores definidos $(x_{i_{k+1}}, x_{i_{k+2}}, \ldots, x_{i_{k+n}})$.

Los factores aleatorios de un sistema se denominarán independientes sí la ley de distribución de cualquiera de sus subsistemas no depende de los valores que tomen los factores complemento del sistema. Para un sistema de magnitudes aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ independientes se cumple la siguiente igualdad:

$$P(X_{i_1} < x_{i_1}, X_{i_2} < x_{i_2}, \ldots, X_{i_k} < x_{i_k})$$
$$= P(X_{i_1} < x_{i_1}) P(X_{i_2} < x_{i_2}), \ldots, P(X_{i_k} < x_{i_k})$$

Ecuación 26:

Donde $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}$ es un subsistema cualquiera del sistema original. Aplicando la Ecuación 26 al sistema de magnitudes aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ se puede escribir que la función de distribución n – dimensional es igual a:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_1(x_1) F_1(x_2) \ldots F_n(x_n) \quad ,$$

Ecuación 27:

Lo que quiere decir que la función de distribución de un sistema de magnitudes aleatorias independientes es igual al producto de las funciones de distribución de cada magnitud aleatoria que compone al sistema. La Ecuación 27 es condición necesaria y suficiente para demostrar la independencia de las magnitudes aleatorias que componen un sistema.

De forma equivalente, a través la densidad probabilística $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, se puede decir que es condición necesaria y suficiente de independencia la siguiente ecuación:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) f_1(x_2) \ldots f_n(x_n)$$

Ecuación 28:

En forma resumida se puede escribir:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i) \quad ;$$

Ecuación 29:

ó

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i)$$

Ecuación 30:

Cómo en el caso de la descripción de una magnitud aleatoria, para la descripción de sistemas de magnitudes aleatorias también es válido y también existen los momentos al origen y centrales del sistema de magnitudes aleatorias.

El momento al origen, de orden $k = k_1 + k_1 + \ldots + k_n$, para un sistema de magnitudes aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n – dimensional es la esperanza matemática del producto $\prod_{i=1}^{n} X_i^{k_i}$:

$$m_{k_1, k_2, \ldots, k_n} = M\left[\prod_{i=1}^{n} X_i^{k_i}\right]$$

Ecuación 31:

El momento central de orden $k = k_1 + k_1 + \ldots + k_n$ para el sistema de magnitudes aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es la esperanza matemática del producto $\prod_{i=1}^{n} \mathring{X}_i^{k_i}$:

$$\mu_{k_1, k_2, \ldots, k_n} = M\left[\prod_{i=1}^{n} \mathring{X}_i^{k_i}\right]$$

Ecuación 32:

Donde $\mathring{X}_i$ es una magnitud aleatoria centralizada $\mathring{X}_i = X_i - m_{x_i}$.

Para un sistema de magnitudes aleatorias de dimensión $n=2$ por ejemplo el conjunto de dos variables (X,Y). Para el caso de magnitudes discretas el momento al origen es:

$$m_{k_1,k_2}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^{k_1} y_j^{k_2} p_{i,j}$$

Ecuación 33:

Donde $p_{i,j}$ es la probabilidad conjunta de que ocurra $X=x_i$ y $Y=y_j$, se respresenta cómo: $p_{i,j}=P(X=x_i, Y=y_j)$. Los momentos centrales serían:

$$\mu_{k_1,k_2}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i-m_x)^{k_1}(y_j-m_y)^{k_2} p_{i,j}$$

Ecuación 34:

Para magnitudes continuas:

$$m_{k_1,k_2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{k_1} y^{k_2} f(x,y)\,dxdy$$

Ecuación 35:

$$\mu_{k_1,k_2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)^{k_1}(y-m_j)^{k_2} f(x,y)\,dxdy$$

Ecuación 36:

Como en el caso de una magnitud aleatoria simple, los momentos estadísticos no caracterizan exhaustivamente al sistema de variables aleatorias, sin embargo sí definen una serie de características importantes del mismo. Los primeros momentos estadisticos del sistema de variables aleatorias $m_{0,1}$ y $m_{1,0}$ son las esperanzas matemáticas de las variables aleatorias que componen el sistema:

$$m_{1,0}=M[X^1 Y^0]=M[X^1]=m_x$$

y

$$m_{0,1}=M[X^0 Y^1]=M[Y^1]=m_y$$

El sentido geométrico de estas esperanzas matemáticas es que representan las coordenadas del punto central al rededor del cual sucede la dispersión de los puntos aleatorios $N(X,Y)$.

El momento central de este sistema caracteriza la varianza en las distintas direcciones de los ejes de coordenadas:

$$\mu_{2,0}=M[\overset{\circ}{X}^2 \overset{\circ}{Y}^0]=M[\overset{\circ}{X}^2]=D[\overset{\circ}{X}]$$

y

$$\mu_{0,2}=M[\overset{\circ}{X}^0 \overset{\circ}{Y}^2]=M[\overset{\circ}{Y}^2]=D[\overset{\circ}{Y}]$$

El segundo momento central cruzado es igual a:

$$\mu_{1,1}=M[\overset{\circ}{X}^1 \overset{\circ}{Y}^1]=M[(X-m_x)(Y-m_y)]=R_{xy}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i-m_x)^1(y_j-m_y)^1 p_{i,j}$$

Para el caso continuo:

$$R_{xy}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x_i-m_x)^1(y_j-m_y)^1 f(x,y)dxdy \quad .$$

Ecuación 37:

Si X y Y son independientes, $R_{x,y}=0$ y $f(x,y)$ = $f(x)f(y)$ entonces la Ecuación 37 se puede reescribir como:

$$R_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - m_x)(y_j - m_y) f(x) f(y)\, dx dy =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x) f(x)\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} (y - m_y) f(y)\, dy =$$
$$\mu_1[X]\mu_1[Y] = 0$$

Ecuación 38:

De la Ecuación 38 se deduce que si $R_{xy} \neq 0$ entonces X y Y son dependientes. La magnitud:

$$r_{xy} = \frac{r_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Ecuación 39:

Se llama coeficiente de correlación entre las magnitudes aleatorias X y Y .

Para las magnitudes aleatorias independientes el coeficiente de correlación $r_{xy} = 0$. La proposición inversa no es válidad, es decir el que $r_{xy} = 0$ es condición necesaria pero no suficiente de independencia.

Las magnitudes aleatorias X y Y , para las cuales $r_{xy} = 0$ se denominan no correlacionadas.

En calidad de características numéricas para un sistema de magnitudes aleatorias n -dimensional, con los elementos $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ se utilizan vectores n -dimensionales de esperanzas matemáticas m_{x_i} con $i = 1,2,\ldots,n$, el vector de varianza $D_{x_i}\, y\, n(n-1)$ momentos de correlación cruzada $R_{x_i x_j}$:

$$R_{x_i x_j} = M[(X_i - m_{x_i})(X_j - m_{x_j})]$$

Ecuación 40

La varianza D_{x_i} se puede ver como el momento cruzado de la magniut X_i consigo misma, es decir:

$$D_{x_i}=R_{x_i x_i}=M[(X_i-m_{x_i})^2] \quad .$$

Ecuación 41

El momento cruzado de correlación se puede representar en forma de matriz de covariación. Esta matriz es cuadrada y simétrica dado que:

$$R_{ij}=M[\mathring{X}_i\mathring{X}_j]=M[\mathring{X}_j\mathring{X}_i]=R_{ji}.$$

Por lo anterior, la matriz de covarianzas se puede presentar en forma de matriz triangular:

$$R_{ij}=\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1n} \\ & R_{22} & \cdots & R_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & R_{nn} \end{pmatrix}$$

Ecuación 42

Para el caso en que las variables del sistema no están correlacionadas la matriz de covarianzas es una matriz diagonal. En la diagonal de esta matriz se encuentran las varianzas de las magnitudes alaetorias del sistema y el resto de elementos de la matriz son ceros.

En lugar de la matriz de covarianzas también se suele utilizar la matriz de correlación. El coeficiente de correlación para entre las variables del sistema se obtiene cómo:

$$r_{ij}=r_{x_i x_j}=\frac{R_{x_i x_j}}{\sigma_{x_i}\sigma_{x_j}}$$

Ecuación 43

que se deben entender como una matriz de covarianza normalizada, cuya diagonal esta compuesta por elementos que son igual a 1.

$$r_{ij}=\begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & 1 & \cdots & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

El sistema $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ será normalmente distribuido si su curva de densidad probabilística n – dimensional tiene la forma:

$$f(x_1, x_2, , x_n)=\frac{1}{\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n} e^{\frac{-1}{2D}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} D_{ik}\frac{x_i-m_i}{\sigma_i}\frac{x_k-m_k}{\sigma_k}},$$

Ecuación 44

Donde D es el determinante de la matriz de correlación:

$$D=\left\| r_{x_i x_j} \right\|=\begin{bmatrix} 1 & r_{x_1 x_2} & \cdots & r_{x_1 x_n} \\ & r_{x_2 x_2} & \cdots & r_{x_2 x_n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{x_n x_n} \end{bmatrix}$$

A su vez D_{ik} es el complemento algebraico de los elementos $r_{x_i x_k}$ del determinante D. La curva de densidad probabilística n - dimensional $(f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ depende de n esperanzas matemáticas, n desviaciones estándares y $n(n-1)/2$ coeficientes de correlación. Si las magnitudes aleatorias del sistema $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ son independientes, entonces la densidad de distribución del sistema se iguala a :

Profesor: Efraín Antonio Domínguez Calle, PhD.

e-mail: edoc@mathmodelling.org

http://www.mathmodelling.org/hidroestocastica

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - m_i)^2}{\sigma_i^2}}$$

Ecuación 45

Esta ecuación se deduce de la anterior al suponer que $r_{x_i x_k} = 0 \, \forall \, i \neq k$ y $r_{x_i x_k} = 1 \, \forall \, i = k$. En consecuencia $D = 1, D_{i,k} = 0 \, \forall \, i \neq k$ y $D_{i,k} = 0 \, \forall \, i = k$.

Características probabilísticas de los procesos estocásticos

Función aleatoria y sus leyes de distribución

Un proceso aleatorio o función aleatoria es una generalización de la noción de magnitud aleatoria cuando el resultado del experimento no es un numero sino una función de uno o mas argumentos, la cual durante las replicas[1] del experimento, de forma aleatoria, cambia su forma/patrón/estructura. En este sentido, cada función obtenida cómo resultado de cada experimento, se denomina realización de la función aleatoria, esta última puede ser caracterizada, incluso en forma determinista. Después de cada experimento se obtiene una realización, de este modo la función aleatoria puede ser concebida como un ramillete o conjunto de realizaciones. Son muchas las disciplinas en las que este enfoque resulto cómodo y más apropiado para la descripción de sistemas naturales en los que la combinación de muchos factores en presencia de incertidumbre conducen a la expresión del proceso estudiado en conjuntos de realizaciones, cada una de ellas respuesta a las mismas perturbaciones y condiciones iniciales. Un ejemplo muy claro de esta situación lo constituye la difusión turbulenta, que en el caso de la atmósfera está condicionada por la variabilidad de los elementos meteorológicos en el tiempo y en el espacio. Las pulsaciones turbulenta tienen lugar en diversas escalas y como consecuencia de ello, las condiciones iniciales no condicionan totalmente los resultados de cada experimento.

Los fenómenos hidrometeorológicos, debidamente acotados, pueden ser representados como funciones aleatorias del tipo y/o del espacio. Por ejemplo, los volúmenes de agua escurridos por una

1 “Replica” indica que el experimento se repite siempre en las mismas condiciones.

cuenca hidrológica y registrados en una estación hidrométrica pueden ser expresados como una función aleatoria, que a nivel diario estaría definida en un subconjunto I que representa a los enteros de 1 a 366 $(I=[1,2,\ldots,365]\forall\neq bisiesto\, I=[1,2,\ldots,365]\forall=bisiesto)$. De modo que se conforma el siguiente ramillete de realizaciones:

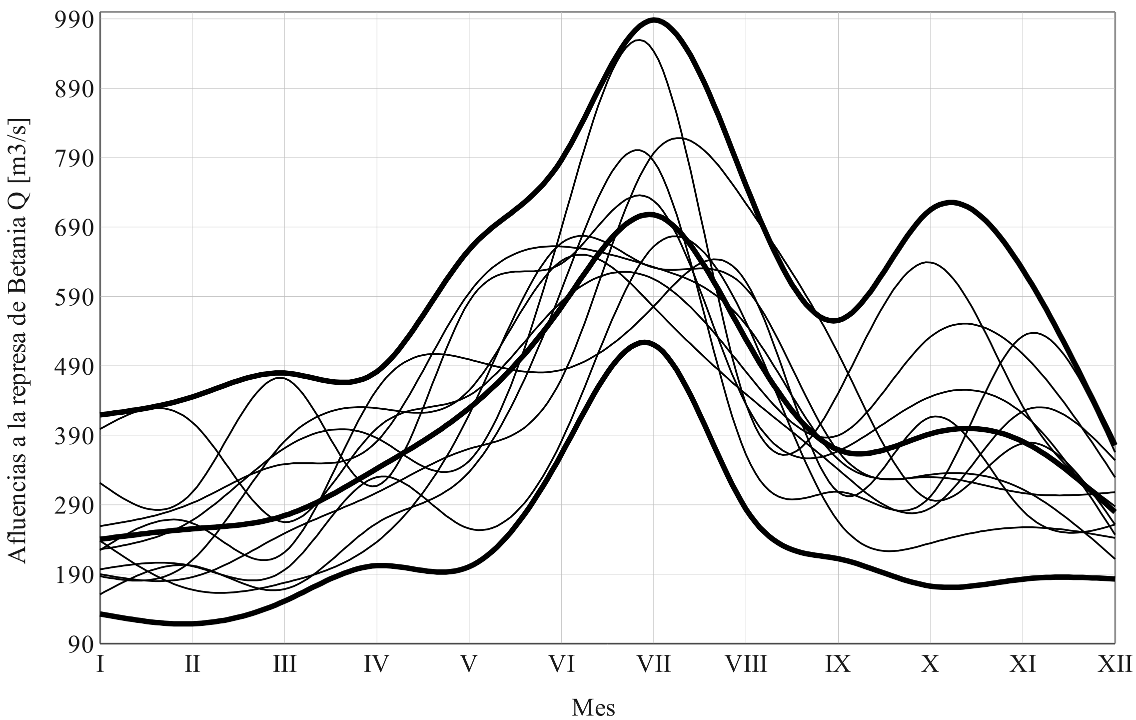

Figura 1: Ramillete de realizaciones para las afluencias de Betania, Río Magdalena

Cada trayectoria de la Figura 1 es una realización del proceso en análisis. Si se fija el argumento de tiempo cómo $t=t_0$ y si se resalta con una línea perpendicular a las abscisas, esta línea interceptará cada realización en un punto. El conjunto de puntos interceptados (más en concreto sus valores) conforman una magnitud aleatoria que corresponde a la disección del proceso en el momento de tiempo $t=t_0$. Partiendo de aquí se puede decir que una función aleatoria X(t), es una función cuya imagen para un argumento dado $(t=t_0)$ constituye una magnitud aleatoria.

AXIOMÁTICA DE KOLMOGOROV

De acuerdo con la axiomática de Kolmogorov una función aleatoria se puede definir como una función $X(\omega,t)$ de los elementos ω del espacio probabilístico (Ω,F,P) y del parámetro t , que recorre un conjunto cualquiera T. Dado un $t=t'(t\in T)$, se secciona el proceso estocástico arrojando cómo resultado una magnitud aleatoria correspondiente a la imagen del proceso en el momento t' . Dado un elemento fijo $\omega=\omega'$, con ω en Ω , el ramillete de realizaciones se contrae a una función determinista $x(t)$ cuyo argumento $x\in T$. Por convención, las funciones aleatorias o procesos aleatorios se describen con funciones representadas por letras mayúsculas $X(t), Y(t)$ por ejemplo, mientras que sus realizaciones por letras minúsculas $x_1(t), x_2(t)\ldots x_n(t),$ en cuyo caso el indice indica el número de orden del experimento. La sección (ó corte) de la función aleatoria (proceso estocástico), correspondiente a un momento de tiempo (argumento t_0 , se simboliza como $X(t_0)$.

El conjunto T , frecuentemente, representa un subconjunto en la recta de los reales T in R, y usualmente puede tomar valores reales en el intervalo seleccionado o también valores discretos. En le primer caso se habla de un proceso aleatorio/estocástico, en el segundo se habla de una secuencia aleatoria. En toco caso el término función aleatoria cubre a los dos anteriores. No siempre el argumento de una función aleatoria es el tiempo, en algunos casos puede estar constituido por coordenadas espaciales, por ejemplo la temperatura del aire en función de la altura. En el caso en el que el argumento T de la función aleatoria representa un dominio en un espacio n - dimensional se dice que esta depende no de un argumento escalar sino de uno vectorial $\boldsymbol{t}=(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ y se puede interpretar como una función multivariada de los argumentos $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Las funciones de este tipo reciben el nombre de _campo aleatorio_. En meteorología se pueden tratar como campos aleatorios la temperatura del airte, el vector de velocidades del viento, la presión atmosférica, entre otros, variables que son función de las tres coordenadas espaciales y del tiempo. Algunas de estas son campos escalares, mientras que otras son campos vectoriales (p.e. El campo de la velocidad del viento.

Retomando lo descrito en parrafos anteriores, una magnitud aleatoria se considera exhaustivamente descrita si se conoce su función de distribución $F(x)=P(P<x)$. Del mismo modo se considera que un sistema de magnitudes aleatorias está descrito si está dada la función de distribución $F(x_1, x_s, \ldots, x_n)=P(X_1<x_1, X_2<x_2, \ldots X_n<x_n)$.

Tratando a las funciones aleatorias como conjuntos de magnitudes aleatorias compuestos por todas las secciones de las mismas en los argumentos $t_1, t_2, \ldots, t_n\in\boldsymbol{T}$

de modo que para la función aleatoria (procesos estocástico) $X(t)$ se obtengan las variables aleatorias: $X_1 = x(t_1)$, $X_2 = x(t_2)$, …, $X_n = x(t_n)$, se desprende que $X(t)$ se puede describir, con la función de distribución de este sistema:

$$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots X_n < x_n)$$

Ecuación 46:

Es evidente, que esta descripción será más exacta en la medida en que los argumentos t_i esten mas cerca uno del otro y en la medida en que el número de estos $n \to \infty$.

En consecuencia el proceso aleatorio se considera descrito si se conoce la función de distribución univariada/unidimensional:

$$F_1(x; t) = P[X(t) < x] \quad ,$$

Ecuación 47:

y si para cada pareja de argumentos (t_1, t_2) y para el sistema de magnitudes conformado por las secciones del proceso $X_1 = X(t_1), X_1 = X(t_1)$ se tiene una distribución bivariada/bidimensional:

$$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = P[X_1 < x_1, X_2 < x_2]$$

Ecuación 48:

En general se exige que tambien se conozca, $\forall t_1, t_2, \ldots, t_n$ se conozca la función de distribución multidimensional/multivariada del sistema de magnitudes aleatorias, $X_2 = x(t_2)$, …, $X_n = x(t_n)$ tal como se expresa en la siguiente ecuación:

$$F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = P[X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots X_n < x_n]$$

Ecuación 49

e-mail: edoc@mathmodelling.org

Cabe anotar que la función de distribución unidimensional de un proceso aleatorio X(t) no es exhaustiva y que para conocer el proceso se deben conocer todas sus funciones de distribución multivariadas/multidimensionales.

Para las funciones aleatorias, tales que, cada una de sus secciones en los argumentos $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ representa una magnitud aleatoria continua se puede derivar la ley multidimensional de densidad probabilística. Sí $F_1(x;t)$ tiene derivada parcial en x :

$$\partial F_1 \frac{(x;t)}{\partial} x = f_1(x;t)$$

Ecuación 50

esta se llama curva de densidad probabilística unidimensional/univariada Y representa el conjunto de leyes de densidad probabilística que tienen como argumento las variables aleatorias que resultan de los cortes/secciones de la función (el proceso) en cada uno de los argumentos $t_1, t_2, \ldots, t_n$. En forma análoga se puede obtener la ley de densidad probabilística n – dimensional :

$$\partial F_n \frac{(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t n)}{\partial x} = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t n)$$

Ecuación 51

Las funciones de distribución y las curvas de densidad probabilística n – dimensionales deben cumplir con la condición de simetría. Esta condición estipula la las mencionadas curva y función deben mantener su misma forma bajo cualquier selección del conjunto de argumentos $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Esto significa que para cualquier transposición de números $i_1, i_2, \ldots, i_n$ de los numeros $1, 2, \ldots, n$ se cumple la siguiente igualdad:

$$F_n(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}; t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}) = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$$

Ecuación 52

$$f_n(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}; t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$$

Ecuación 53

Clase 2 de Marzo de 2011

Ejercicio :

Revisemos el proceso $X(t) = A\sin(wt)$, cuya amplitud A es una magnitud aleatoria con esperanza matemática m y varianza D . ¿Cómo son sus características $m_x(t)$, $R_x(t_1, t_2)$ y varianza $D_x(t)$?:

Aplicando la definición de esperanza matemática se obtiene:

$$m_x(t) = M[Asin(wt)] = M[A]\sin(wt) = msin(wt)$$.

Según la definición del momento de Correlación:

$$R_x(t_1, t_2) = M\{[X(t_1) - m_x(t_1)][X(t_2) - m_x(t_2)]\}$$

$$R_x(t_1, t_2) = M\{[(A\sin(wt_1)) - (m\sin(wt_1))][(A\sin(wt_2)) - (m\sin(wt_2))]\}$$

$$R_x(t_1, t_2) = M[(A-m)\sin(wt_1)][(A-m)\sin(wt_2)]$$

$$R_x(t_1, t_2) = M[(A-m)^2\sin(wt_1)\sin(wt_2)]$$

Como $D = M[(A-m)^2]$ entonces: $R_x(t_1, t_2) = D\sin(wt_1)\sin(wt_2)$

Si además sucede que $t_1 = t_2 = t$ entonces, $D_x(t) = R_x(t, t) = D\sin^2(wt)$.

Sistemas de Procesos Aleatorios

Los fenómenos hidrometeorológicos constituyen sistemas en los que varios procesos están interrelacionados (Balance hidrológico por ejemplo, cambio de la temperatura del aire, presión atmosférica, humedad, etc). Como en el caso de sistemas de magnitudes aleatorias, un sistema de n procesos aleatorios se puede estudiar como un vector n - dimensional que depende del argumento t . Debido a la dificultad para estudiar el sistema de procesos aleatorios a través de sus funciones n -dimensionales de distribución, este análisis se debe limitar al estudio de los momentos estadísticos del sistema. Para el caso de sistemas de procesos aleatorios se utilizan los siguientes momentos estadísticos:

1. Los momentos al origen de primer orden, que coinciden con el conjunto que contiene las esperanzas matemáticas de cada proceso del sistema;
2. Los momentos centrales de segundo orden del sistema, que pueden ser de dos tipos
   a) El segundo momento central para las secciones de un mismo proceso

      $R_{x_1,x_2}(t_1,t_2)$

   b) El segundo momento central para las secciones cruzadas entre los procesos (momento cruzado de correlación $R_{x,y}(t_1,t_2)$)

Por ejemplo, observemos el sistema de procesos $\{X(t),Y(t)\}$, sus momentos estadísticos serán:

1. Primer momento central $\{m_x(t),m_y(t)\}$
2. El vector de momentos de correlación $\{R_x(t_1,t_2);R_y(t_1,t_2)\}$
3. El momento de correlación cruzada

$$R_{xy}(t_1,t_2)=M\{[X(t_1)-m_x(t_1)][Y(t_2)-m_y(t_2)]\}$$

que caracteriza el nivel de relación lineal entre los procesos $X(t), Y(t)$.

Es importante resaltar que $R_{xy}(t_1, t_2) \neq R_{yx}(t_1, t_2)$, no obstante:

$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{yx}(t_2, t_1)$.

Es fácil demostrar que la correlación cruzada no se afecta si se añaden constantes a cada proceso aleatorio para argumentos concretos t_1, t_2 , $R_{xy}(t_1, t_2)$ es el momento de correlación entre las magnitudes aleatorias $x(t_1)$ y $y(t_2)$, por lo tanto $R_{xy}(t_1, t_2) \leqslant \sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)$ (***)

Se puede introducir el coeficiente de correlación como $r_{xy}(t_1, t_2) = \dfrac{R_{xy}(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)}$

De acuerdo con ***

$$r_{xy}(t_1, t_2) \leqslant 1$$

Si $r_{xy}(t_1, t_2) \rightarrow 0$ entonces los procesos no están linealmente correlacionados lo cual es una condición necesaria pero no suficiente para inferir la independencia de los procesos del sistema.

Dado el sistema $\{X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)\}$ su caracterización requiere:

1. n esperanzas matemáticas matemáticas $\{m_{x_i}(t)\}$ con n momentos de correlación $R_{xi}(t_1, t_2)$
2. $\dfrac{n(n-1)}{2}$ momentos de correlación cruzada $R_{xixj}(t_1, t_2)$ con $i < j$ dado que $R_{x_i x_j}(t_1, t_2) = R_{x_j x_i}(t_2, t_1)$

$$R_{x_i x_j}(t_1,t_2)=\begin{bmatrix} R_{11}(t_1,t_2) & R_{12}(t_1,t_2) & R_{13}(t_1,t_2) & \cdots & R_{1n}(t_1,t_2) \\ & R_{22}(t_1,t_2) & R_{23}(t_1,t_2) & \cdots & R_{2n}(t_1,t_2) \\ & & R_{33}(t_1,t_2) & \cdots & R_{3n}(t_1,t_2) \\ & & & \ddots & R_{nn}(t_1,t_2) \end{bmatrix}$$

Finalmente dado $Z(t)=X(t)+Y(t)$ entonces $m_z(t)=m_x(t)+m_y(t)$, mientras que $R_z(t_1,t_2)$ será: $R_z(t_1,t_2)=M[\mathring{Z}(t_1)\mathring{Z}(t_2)]$. Dado que y $\mathring{Z}(t)=\mathring{X}(t)+\mathring{Y}(t)$ se obtiene que:

$$R_z(t_1,t_2)=M[\mathring{X}(t_1)+\mathring{Y}(t_1)][\mathring{X}(t_2)+\mathring{Y}(t_2)]$$

$$R_z(t_1,t_2)=M[\mathring{X}(t_1)\mathring{X}(t_2)+\mathring{Y}(t_1)\mathring{X}(t_2)+\mathring{Y}(t_2)\mathring{X}(t_1)+\mathring{Y}(t_1)\mathring{Y}(t_2)]$$

$$R_z(t_1,t_2)=R_x(t_1,t_2)+R_{xy}(t_1,t_2)+R_{yx}(t_1,t_2)+R_y(t_1,t_2)$$

Si $Z=X(t)+Y$, entonces:

$$m_z(t)=m_x(t)+m_y$$

y si $X(t)$ es independiente de Y entonces:

$$R_z(t_1,t_2)=R_x(t_1,t_2)+D_y \quad .$$

Procesos Estacionarios

Un proceso se denomina estacionario si sus leyes de distribución no cambian al añadir a todos los argumentos de la función de distribución una misma magnitud.

$X(t)$ Será estacionario si:

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1 + t_0, t_2 + t_0, \ldots, t_n + t_0)$$

si n = 1 entonces:

$f_1(x;t) = f_1(x;t+t_0)$, además si $t_0 = -t$ entonces

$f_1(x;t) = f_1(x;t-t) = f_1(x)$

En ese caso la curva de densidad probabilística unidimensional **¡No depende del tiempo!**

$f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_2(x_1, x_2; t_1 + t_0, t_2 + t_0)$

Si $t_0 = -t_1$ entonces:

$f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_2(x_1, x_2; t_1 - t_1, t_2 - t_1)$

$f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_2(x_1, x_2; 0, t_2 - t_1)$

$f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_2(x_1, x_2; \tau)$ en donde $\tau = t_2 - t_1$

en este caso solo depende de la diferencia τ y no del argumento t esto conduce a:

$$m_x(t) = \int_{\infty}^{-\infty} x f_1(x)\, dx = m_x = constante$$

Así:

$$R_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int (x_1 - m_x)(x_2 - m_x) f_2(x_1, x_2; \tau)\, dx_1\, dx_2$$

$R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau)$.

Profesor: Efraín Antonio Domínguez Calle, PhD.

e-mail: edoc@mathmodelling.org

Algunas pruebas estadísticas necesarias para este curso

1) Prueba de aleatorieadad

2) Prueba de Kolmogorov λ

La prueba de Kolmogorov verifica la bondad de ajuste entre la función de distribución teórica $F(x)$ y la empírica - $F^*(x)$ - a través del estadístico λ. Para llegar a este estadístico se determina la diferencia máxima " D " entre las ordenadas de la función teórica y empírica cómo:

$$D = max\left|F^* - F(x)\right|$$

y además: $\lambda = D\sqrt{n}$, donde n es la longitud del conjunto estadístico analizado. Tomando cómo hipotesis nula H_o: que los datos del conjunto estadístico analizado corresponden a la función de distribución teórica propuesta, esta hipotesis no se rechaza si: $\lambda \leq \lambda_q$, donde λ_q es el valor crítico que se obtiene de la distribución de Kolmogorov que en su forma límite es aproximada cómo:

$$P(\lambda) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} e^{-2i^2\lambda^2}$$

Nivel de Significación α	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
Valor Crítico λ_q	0.89	0.97	1.07	1.22	1.36	1.48	1.63	1.73	1.95	2.03

Tabla 1: Valores críticos para la prueba de Kolmogorov

Prueba de Cramer-Von Mises-Smirnov ($n\omega^2$)

Esta prueba aplica el estadístico:

$$n\omega^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n} [F^*(Q) - F(Q)]^2$$

Ecuación 37

Para $n \geq 40$ la distribución de $n\omega^2$ no depende del tipo de distribución teórica que se está ajustando y tiende a una distribución límite cómo la presentada en el siguiente cuadro:

Tabla 8. Valores críticos para el estadístico $n\omega^2$

Nivel de significación $q = p(n\omega^2 > z_q)100$	50	40	30	20	10	5	3	2	1	0.1
Valor crítico z_q	0.1184	0.1467	0.1843	0.2412	0.3473	0.4614	0.5489	0.6198	0.7435	1.1679

Si $n\omega^2 > n\omega_q^2$ la hipótesis nula sobre la concordancia de la función de distribución teórica con los datos empíricos se rechaza con un nivel de significación q.