Momentos Estadísticos de una Magnitud Aleatoria

Profesor Efraín Domínguez

Pontificia Universidad JAVERIANA Colombia

Facultad de Estudios Ambientales y Rurales
Departamento de Ecología y Territorio
e.dominguez@javeriana.edu.co

3 de marzo de 2016

Contenido

Momentos Estadísticos

Los momentos estadísticos de una magnitud aleatoria son un conjunto de características cuantitativas que sirven para describirla. Este conjunto esta compuesto por momentos estadísticos de orden $k|k \in \{1, 2, ..., n\}$. Tener la colección de momentos estadísticos hasta el momento de orden n con $n \to \infty$ es equivalente a tener la Curva de Densidad Probabilística (CDP) $p(x)$ o a su equivalente función de distribución $F(x)$. En este curso los momentos estadísticos se clasifican en:

1. Momentos estadísticos al origen m_k;
2. Momentos estadísticos centrales μ_k;

Momentos al origen: ecuación general

Para el caso continuo:

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) dx \tag{1}$$

Para el caso discreto:

$$m_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i \tag{2}$$

Con: k - Orden del momento estadístico $k \in 1, 2, ..., \infty$; n - número de datos observados de la magnitud aleatoria.

Momentos al origen: Esperanza matemática $E[X]$

Si $k = 1 \Rightarrow$, para el caso continuo:

$$m_X = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = E[X] \tag{3}$$

Para el caso discreto:

$$m_X = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = E[X] \tag{4}$$

Segundo orden: Medida de dispersión

Para $k = 2 \Longrightarrow$ en el caso continuo:

$$m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx \tag{5}$$

Para el caso discreto:

$$m_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i \tag{6}$$

Tercer orden: Medida de asimetría

Para $k = 3 \Longrightarrow$ en el caso continuo:

$$m_3 = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 p(x) dx \tag{7}$$

Para el caso discreto:

$$m_3 = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 p_i \tag{8}$$

Momentos estadísticos centrales

Sea $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \Longrightarrow \mathring{X} = x_i - m_X$ es una variable centralizada. $\mu_{X,k}$ - El momento central de orden k de X, es equivalente al momento de origen de X centralizado: Para el caso continuo:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} \mathring{x}^k p(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^k p(x)dx \tag{9}$$

Para el caso discreto:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} \mathring{x}_i^k p_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_X)^k p_i \tag{10}$$

μ_k cuando $k = (1, 2)$

Cuando $k = 1 \Longrightarrow \mu_X = 0. k = 2$ produce la varianza de X, D_x

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathring{x}^2 p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 p(x) dx = D_x \tag{11}$$

Para el caso discreto:

$$\mu_2 = \sum_{i=1}^{n} \mathring{x}_i^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_X)^2 p_i = D_x \tag{12}$$

En general todo momento de orden 2 explica dispersión. El momento central de orden 2 se puede adimensionalizar representándolo cómo coeficiente de variación $C_{V_x} = \sigma_x / m_X$, donde $\sigma_x = \sqrt{D_x}$.

μ_k cuando $k = 3$

Con $k = 3$ se produce una medida de la asimetría de X, μ_3

$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathring{x}^3 p(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^3 p(x)dx \tag{13}$$

Para el caso discreto:

$$\mu_3 = \sum_{i=1}^{n} \mathring{x}_i^3 p_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_X)^3 p_i \tag{14}$$

En general todo momento de orden 3 explica asimetría. El momento central de orden 3 se puede adimensionalizar representándolo cómo coeficiente de asimetría $C_{S_X} = \frac{\mu_3}{\sigma_X^3}$.

μ_k cuando $k = 4$

Con $k = 4$ se produce una medida de la curtosis de X, μ_4

$$\mu_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathring{x}^4 p(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^4 p(x)dx \tag{15}$$

Para el caso discreto:

$$\mu_4 = \sum_{i=1}^{n} \mathring{x}_i^4 p_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_X)^4 p_i \tag{16}$$

En general todo momento de orden 4 explica curtosis. El momento central de orden 4 se puede adimensionalizar representándolo cómo coeficiente de curtosis $C_{Cx} = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3$. $C_{Cx} < 0$ - Platicurticas $C_{Cx} > 0$ - Leptocurticas, la distribución normal tiene $C_{Cx} = 0$.

Correspondencia entre centrales y al origen $\mu_i = f(m_i)$

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2 \tag{17}$$
$$\mu_3 = m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3 \tag{18}$$
$$\mu_4 = m_4 - 4m_3 m_1 + 6m_2 m_1 - 3m_1^4 \tag{19}$$
$$\tag{20}$$

Errores de definición m_1 y μ_2

$$\varepsilon_{m_1} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \tag{21}$$

$$\varepsilon_{m_1} = \frac{C_{Vx}}{\sqrt{n}} \tag{22}$$

$$\varepsilon_{m_1} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{1+r}}{\sqrt{1-r}} \tag{23}$$

$$\varepsilon_{C_{Vx}} = C_{Vx}\sqrt{(1+C_{Vx}^2)/2n} \tag{24}$$

$$\varepsilon_{C_{Vx}} = \frac{C_{Vx}}{n+4C_{Vx}^2}\sqrt{\frac{n(1+C_{Vx}^2)}{2}}(1+\frac{3C_{Vx}r^2}{1+r}) \tag{25}$$