Procesos Aleatorios

Profesor Efraín Domínguez

Facultad de Estudios Ambientales y Rurales
Departamento de Ecología y Territorio
e.dominguez@javeriana.edu.co

19 de abril de 2016

Contenido

1. Procesos Aleatorios

2. Caracterización de un PA

¿Que es un Proceso Aleatorio (PA)?

Un **proceso aleatorio** o función aleatoria es una generalización de la noción de magnitud aleatoria cuando el resultado del experimento no es un numero sino una función de uno o mas argumentos, la cual durante las **replicas** del experimento, de forma aleatoria, cambia su forma/patrón/estructura. En este sentido, cada función obtenida cómo resultado de cada experimento, se denomina **realización** de la función aleatoria, esta última puede ser caracterizada, incluso en forma determinista. Después de cada experimento se obtiene una realización, de este modo la función aleatoria puede ser concebida como un **ramillete** o conjunto de realizaciones.

Ejemplo:

Los fenómenos hidrometeorológicos, debidamente acotados, pueden ser representados como funciones aleatorias del tipo y/o del espacio. Por ejemplo, los volúmenes de agua escurridos por una cuenca hidrológica y registrados en una estación hidrométrica pueden ser expresados como una función aleatoria, que a nivel diario estaría definida en un subconjunto I que representa a los enteros ($I = [1, 2, \ldots, 365]$, excluyendo bisiestos). De modo que se conforma el siguiente ramillete de realizaciones:

Ejemplo:

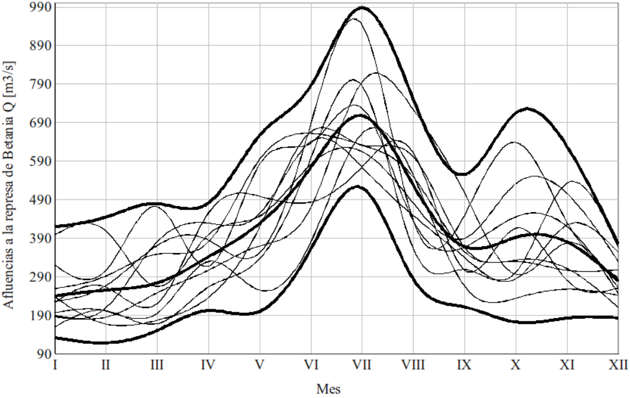

Figura 1 : Ramillete de un proceso estocástico

Nociones:

De acuerdo con la axiomática de Kolmogorov una función aleatoria se puede definir como una función $X(\omega, t)$ de los elementos ω del espacio probabilístico (Ω, F, P) y del parámetro t, que recorre un conjunto cualquiera T. Dado un $t = t'$ con $(t \in T)$, se secciona el proceso estocástico arrojando cómo resultado una magnitud aleatoria correspondiente a la imagen del proceso en el momento $t^{'}$. En el caso en el que el argumento de la función aleatoria representa un dominio en un espacio n - dimensional se dice que esta depende no de un argumento escalar sino de uno vectorial $\mathbf{t} = (t_1, t_2, ..., t_n)$ y se puede interpretar como una función multivariada de los argumentos $(t_1, t_2, ..., t_n)$. Las funciones de este tipo reciben el nombre de **campo aleatorio**

Caracterización de un PA

La mejor descripción de una magnitud aleatoria es su Función de Distribución $F(x)$:

$$F(x) = p(X < x) \tag{1}$$

En el caso de un proceso aleatorio esta caracterización se hace a través de la **función de distribución multivariada**:

$$F(x_1, x_s, \ldots, x_n) = p(X_1 < x_1, X_2 < x_2, ...X_n < x_n) \tag{2}$$

A esta también se le conoce cómo **n-dimensional y/o conjunta**.

Caracterización de un PA

Los procesos aleatorios se pueden tratar como si fueran un SMA en el que cada magnitud aleatoria está indexada por los argumentos $t_1, t_2, ..., t_n \in T$. De este modo al sistema lo componen las variables aleatorias:

$$X_1 = x(t_1), X_2 = x(t_2), ..., X_n = x(t_n). \tag{3}$$

$X(t)$ El proceso se puede describir con la colección de funciones de distribución:

$$F_1(x; t_i) = p[X(t_i) < x_{t_i}] \tag{4}$$

Con $i = 1, 2, ..., n$, y n depende de la escala de tiempo del proceso (mensual, decadal, semanal, diaria, horaria, etc.).

Ejemplo:

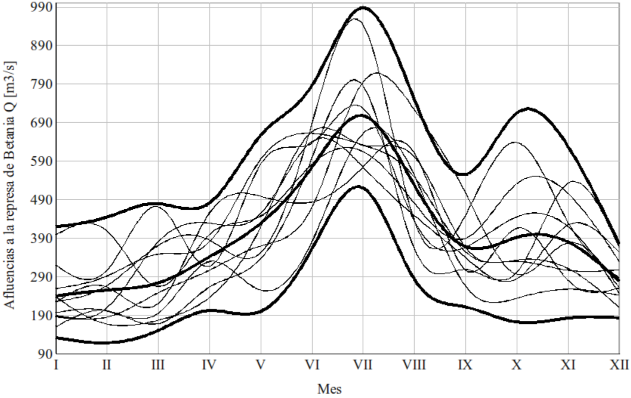

Figura 2 : Ramillete de un proceso estocástico

Densidad de Probabilidad

Cabe anotar que la función de distribución unidimensional de un proceso aleatorio X(t) no es exhaustiva y que para conocer el proceso se deben conocer todas sus funciones de distribución multivariadas/multidimensionales.

Para las funciones aleatorias, tales que, cada una de sus secciones en los argumentos $(t_1, t_2, ..., t_n)$ representa una magnitud aleatoria continua se puede derivar la ley multidimensional de densidad probabilística. Sí $F_1(x; t)$ tiene derivada parcial en x :

$$\frac{\partial F_1(x; t)}{\partial x} = p_1(x; t) \tag{5}$$

Densidad de Probabilidad

Es claro que también es necesario:

$$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = p[X_1 < x_1, X_2 < x_2] \tag{6}$$

En forma análoga se puede obtener la ley de densidad probabilística – dimensional:

$$\frac{\partial F_n(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., tn)}{\partial x} = f_n(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., tn) \tag{7}$$

Proceso Aleatorio Estacionario

Un proceso se denomina estacionario si sus leyes de distribución no cambian al añadir a todos los argumentos de la función de distribución una misma magnitud. $X(t)$ será estacionario si:

$$p_n(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n) = p_n(x_1, x_2, ..., x_n; t_1 + t_0, t_2 + t_0, ..., t_n + t_0)$$

Si $n = 1 \Rightarrow p_1(x; t) = p_1(x; t + t_0)$; Además cuando $t_0 = -t \Rightarrow p_1(x; t) = p_1(x; t - t) = p_1(x)$, es decir **¡NO DEPENDE DEL TIEMPO!**

Representación de un SMA 2D

Cuadro 1 : $p(x_i, x_j; t_i, t_j)$

x_i, x_j	x_{j_1}	$\dots$	x_{j_k}	$\dots$	x_{j_m}	$\sum_{j=1}^{n} p_j$
x_{i_1}	p_{i_1, j_1}				p_{i_1, j_m}	p_{i_1}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_{i_k}	p_{i_k, j_1}	$\dots$	p_{i_k, j_k}	$\dots$	p_{i, j_m}	p_{i_k}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_{i_n}	p_{i_n, j_1}	$\dots$	p_{i_n, j_k}	$\dots$	p_{i_n, j_m}	p_{i_n}
$\sum_{i=1}^{m} p_i$	p_{j_1}	$\dots$	p_{j_k}	$\dots$	P_{j_m}	1

Representación de un SMA 2D

Cuadro 2 : $p(x_i, x_j; t_i, t_j)$ - Condicionada

x_i, x_j	**0**	**1**	$\sum_{j=1}^{n} p_j$
-1	0.1	0.2	0.3
0	0.3	0.1	0.4
1	0.1	0.2	0.3
$\sum_{i=1}^{n} p_i$	0.5	0.5	1.0

Proceso Aleatorio Estacionario

Un proceso se denomina estacionario si sus leyes de distribución no cambian al añadir a todos los argumentos de la función de distribución una misma magnitud. $X(t)$ será estacionario si:

$p_n(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n) = p_n(x_1, x_2, ..., x_n; t_1 + t_0, t_2 + t_0, ..., t_n + t_0)$

Si $n = 2 \Rightarrow p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = p_2(x_1, x_2; t_1 + t_0, t_2 + t_0))$; Si $t_0 = -t \Rightarrow p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = p_2(x_1, x_2; t_1 - t_1, t_2 - t_1) \Rightarrow p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = p_2(x_1, x_2; 0, t_2 - t_1) \Rightarrow p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = p_2(x_1, x_2; \tau)$.

En este caso $\tau = t_2 - t_1 \Rightarrow m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x) dx = m_x$

Y: $R_x(t_1, t_2) = \iint_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - m_x)(x_2 - m_x) p_2(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 \Rightarrow R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau)$

Sistema de Procesos Aleatorios

Dado el sistema:$\{X_1(t), X_2(t), ..., X_n(t)\}$, su descripción requiere:

1. n esperanzas matemáticas $\{m_{x_i}(t)\}$;
2. n momentos de correlación $R_{xi}(t_1, t_2)$ con $i = 1, 2, ...n$;
3. $n(n-1)/2$ momentos de correlación cruzada $R_{xixj}(t_1, t_2)$ con $i < j$ dado que $R_{x_i x_j}(t_1, t_2) = R_{x_j x_i}(t_2, t_1)$.

Sistema de Procesos Aleatorios

$$
\begin{bmatrix}
R_{11}(t_1,t_2) & R_{12}(t_1,t_2) & R_{13}(t_1,t_2) & \dots & R_{1n}(t_1,t_2) \\
 & R_{22}(t_1,t_2) & R_{23}(t_1,t_2) & \dots & R_{2n}(t_1,t_2) \\
 & & R_{33}(t_1,t_2) & \dots & R_{3n}(t_1,t_2) \\
 & & & \ddots & R_{nn}(t_1,t_2)
\end{bmatrix}
$$