Sistema de Magnitudes Aleatorias

Profesor Efraín Domínguez

Facultad de Estudios Ambientales y Rurales
Departamento de Ecología y Territorio
e.dominguez@javeriana.edu.co

12 de abril de 2016

Contenido

¿Que es un SMA?

Muchos sistema complejos están condicionados por una gran cantidad de factores aleatorios. La descripción exhaustiva de estos sistemas requiere no solo de las leyes de distribución de cada uno de los factores aleatorios que afectan al sistema sino también de las interrelaciones entre estos factores.

Los sistemas hidrometeorológicos son aptos para ser descritos cómo sistemas aleatorios, p.e. La temperatura, presión del aire y velocidad del viento de un punto en el espacio se encuentran interrelacionadas.

Definición:

Un sistema de n variables aleatorias $(X_1, X_2, ..., X_n)$ se puede interpretar, geométricamente, como las coordenadas de un punto aleatorio en un espacio n-dimensional, o lo que es lo mismo como un vector aleatorio n-dimensional. Cómo característica exhaustiva del sistema se utiliza la función de distribución n-dimensional:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, ..., X_n < x_n) \tag{1}$$

y define la probabilidad de que conjuntamente $X_i < x_i \ \forall i = \{1, 2, ..., n\}$.

Propiedades:

1. Es una función de distribución multivariada no decreciente;
2. Si algún $X_i \longrightarrow -\infty \Longrightarrow F(x_1, x_2, ..., x_n) \longrightarrow 0$;
3. Si $(x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n) \longrightarrow \infty \Longrightarrow F(x_1, x_2, ..., x_n) \longrightarrow F(x_1, x_2, ..., x_k)$;
4. Si $\forall i \neq j, x_i \longrightarrow \infty \Longrightarrow F(x_1, x_2, ..., x_n) = F(X_j)$, $F(X_j)$ se llama distribución marginal j-esima;
5. Si $\forall x_i \longrightarrow \infty \Longrightarrow F(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$.

Curva de Densidad Probabilística $p(x_1, x_2, ..., x_n)$

Si para un sistema de magnitudes aleatorias existe todas las derivadas cruzadas de la función de distribución, tomadas para cada uno de los argumentos de , $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ entonces la densidad de distribución de probabilidades multivariada se define cómo:

$$p(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_n} \tag{2}$$

Función de Distribución Multivariada

La función de distribución puede ser expresada a través de la densidad de probabilidades como:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = p(-\infty < X_1 < x_1, -\infty < X_2 < x_2, ..., -\infty < X_n < x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} ... \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n$$

Si se conoce la densidad n-dimensional se puede definir la densidad k-dimensional con k<m<n de la siguiente forma:

$$p(x_1, x_2, ..., x_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, x_2, ..., x_n) dx_{k+1} dx_{k+2} ... dx_{k+n}$$

Para definir la densidad de distribución marginal para X_j se debe integrar la densidad de distribución del sistema tomando como limites de integración de $-\infty$ a $+\infty$ para todo $x_i \forall i <> j$.

Función de Distribución Condicionada n-Dimensional

Función de Distribución de un Subsistema

Para caracterizar la dependencia entre todos los factores aleatorios que influyen sobre el sistema de variables aleatorias se utilizan las funciones de distribución condicionadas. La función de distribución de un subsistema $(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k})$ se llama a la función de distribución construida bajo la suposición de que las magnitudes aleatorias restantes ya tomaron unos valores definidos $(x_{i_{k+1}}, x_{i_{k+2}}, \ldots, x_{i_{k+n}})$.

Función de Distribución Condicionada n-Dimensional

Sistema de Magnitudes Aleatorias Independientes

Los factores aleatorios de un sistema se denominarán independientes sí la ley de distribución de cualquiera de sus subsistemas no depende de los valores que tomen los factores complemento del sistema. Para un sistema de magnitudes aleatorias independientes se cumple la siguiente igualdad:

$$p(X_{i_1} < x_{i_1}, X_{i_2} < x_{i_2}, \dots, X_{i_k} < x_{i_k}) = p(X_{i_1} < x_{i_1})p(X_{i_2} < x_{i_2}), \dots, p(X_{i_k} < x_{i_k})$$

De otro modo se puede escribir:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_i(x_i)$$

Momentos al origen de un SMA

El momento al origen, de orden $k = k_1 + k_1 + ... + k_n$, para un sistema de magnitudes aleatorias $X_1, X_2, \dots, X_n$, $n-$dimensional es la esperanza matemática del producto $\prod_{i=1}^{n} X_i^{k_i}$:

$$m_{k_1,k_2,\dots,k_n} = E[\prod_{i=1}^{n} X_i^{k_i}]$$

El momento central, de orden $k = k_1 + k_1 + ... + k_n$, para un sistema de magnitudes aleatorias $X_1, X_2, \dots, X_n$, $n-$dimensional es la esperanza matemática del producto $\prod_{i=1}^{n} \mathring{X}_i^{k_i}$:

$$m_{k_1,k_2,\dots,k_n} = E[\prod_{i=1}^{n} \mathring{X}_i^{k_i}]$$

Donde $\mathring{X}$ es una magnitud aleatoria centralizada $\mathring{X}_i = X_i - m_{x_i}$.

SMA Bidimensional

Para un sistema de magnitudes aleatorias de dimensión $n = 2$ por ejemplo el conjunto de dos variables (X, Y). Para el caso de magnitudes discretas el momento al origen de este SMA 2D es:

$$m_{k_1,k_2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i^{k_1} y_j^{k_2} p_{i,j}$$

$p_{i,j}$ - Probabilidad Conjunta, es la probabilidad de que
$$p_{i,j} = P(X = x_i, Y = y_j)$$

El momento central de este sistema sería:
$$\mu_{k_1,k_2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i - m_x)^{k_1} (y_j - m_y)^{k_2} p_{i,j}$$

Interpretación de los momentos de un SMA 2D

Primer momento al origen:

$$m_{1,0} = E[X^1 Y^0] = E[X^1] = m_x \tag{3}$$
$$m_{0,1} = E[X^0 Y^1] = E[Y^1] = m_y \tag{4}$$

Segundo momento central:

$$\mu_{2,0} = E[\mathring{X}^2 \mathring{Y}^0] = E[\mathring{X}^2] = D[\mathring{X}] \tag{5}$$
$$\mu_{0,2} = E[\mathring{X}^0 \mathring{Y}^2] = E[\mathring{Y}^2] = D[\mathring{Y}] \tag{6}$$

Interpretación de los momentos de un SMA 2D

El segundo momento central cruzado es igual a:

$$
\begin{aligned}
\mu_{1,1} &= E[\mathring{X}^1 \mathring{Y}^1] = E[(X - m_x)(Y - m_y)] = R_{xy} && (7)\\
R_{xy} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i - m_x)^1 (y_j - m_y)^1 p_{i,j} && (8)\\
r_{xy} &= \frac{R_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} && (9)
\end{aligned}
$$

Representación de un SMA

Finalmente, la representación de un SMA n-dimensional contiene:

1. Un vector n-dimensional de esperanzas matemáticas $\mathbf{m_{x_i}}$;
2. Un vector n-dimensional de varianzas $\mathbf{D_{x_i}}$;
3. $n(n-1)$ momentos de correlación cruzada $R_{x_i x_j}$

$$R_{x_i x_j} = E[(X_i - m_{x_i})(X_j - m_{x_j})].$$

Representación de un SMA 2D

Cuadro : $p(x_i, y_j)$

$x_i,\ y_j$	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_n	$\sum_{j=1}^{n} p_j$
x_1	$p_{1,1}$				$p_{1,m}$	p_1
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_i	$p_{i,1}$	$\dots$	$p_{i,j}$	$\dots$	$p_{i,m}$	p_i
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	$p_{1,1}$	$\dots$	$p_{n,j}$	$\dots$	$p_{n,m}$	p_n
$\sum_{i=1}^{n} p_i$	p_1		p_j	$\dots$	$P - m$	1

Representación de un SMA 2D

Cuadro : $p(x_i, y_j)$ - Condicionada

X, Y	**0**	**1**	$\sum_{j=1}^{n} p_j$
-1	0.1	0.2	0.3
0	0.3	0.1	0.4
1	0.1	0.2	0.3
$\sum_{i=1}^{n} p_i$	0.5	0.5	1.0