MODELACIÓN MATEMÁTICA
Una introducción al método

Profesor: Efraín Antonio DOMÍNGUEZ CALLE, Ph.D.
Página Web: http://mathmodelling.googlepages.com
e-mail: e.dominguez@javeriana.edu.co

INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN r Y SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Muchos problemas de modelación matemática conducen a ecuaciones diferenciales de orden mayor que uno o a sistemas de ecuaciones diferenciales. Una ecuación diferencial de orden r es aquella que relaciona la variable independiente x con la función incógnita $y = f(x)$ y sus derivadas y', y'', ..., y^r (véase ecuación 1).

$F(x, y, y', y'', ..., y^r) = 0$	(1)

La solución de la ecuación diferencial (1) consiste en la búsqueda de la función $y = f(x)$, que satisfaga esta ecuación para todos los valores de $x \in [a, b]$.

La solución general de la ecuación (1) tiene la forma siguiente:

$y = f(x; C_1; C_2, ...; C_r)$	(2)

Donde C_1, C_2, ..., C_r son constantes arbitrarias, que cuando toman valores concretos determinan la solución particular para la ecuación diferencial (1). En el problema de CAUCHY, para la ecuación (1), se busca una solución particular que satisfaga las r condiciones iniciales siguientes:

$y_{x=a} = y(a), y'_{x=a} = y'(a), \; y''_{x=a} = y''(a), ..., y^{r-1}_{x=a} = y^{r-1}(a)$	(3)

La gráfica de cada solución particular de (1) se llama curva integral y el conjunto de todas las curvas integrales conforman un familia de curvas integrales r - paramétricas.

En este curso no se estudian los métodos de solución para ecuaciones de segundo y orden mayor. Para resolverlas se utiliza el hecho de que cualquier ecuación de segundo o mayor orden puede ser convertida en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales:

$F_i(x; y_1, y_2, ...y_n; y'_1, y'_2, ..., y'_n; y''_1, y''_2, ..., y''_n; ...; y_1^r, y_2^r, ..., y_n^r) = 0$; $i = 1, 2, ..., n$	(4)

Efraín Antonio DOMÍNGUEZ CALLE
Departamento de Ecología y Territorio
Facultad de Estudios Ambientales y Rurales
Pontificia Universidad Javeriana

relacionan una variable independiente x con varias funciones incógnita $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x),..., y_n = f_n(x)$ y sus derivadas respectivas $y'_1, y'_2,..., y'_n$; $y''_1, y''_2,..., y''_n$; ...; $y_1^r, y_2^r,..., y_n^r$. El orden r_i de cada ecuación (4) es igual al de la derivada de mayor orden que contenga. La solución general del sistema de ecuaciones diferenciales (4) es un vector compuesto por las funciones $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x),..., y_n = f_n(x)$ y contiene $r = r_1 + r_2 + ... + r_n$ constantes arbitrarias.

La integración del sistema (4) se puede reducir a la integración de una EDO de orden r, pero la propiedad inversa es más atractiva, cualquier sistema (4) puede ser reducido a un sistema equivalente de r ecuaciones de primer orden sustituyendo las diferenciales de alto orden con funciones incógnitas auxiliares.

Dada una ecuación diferencial ordinaria de orden n:

$u^n = f(x, u, u', ..., u^{n-1})$	(5)

Introduciendo como nuevas funciones incógnitas $y_1 = u$, $y_2 = u', ..., y_n = u^{n-1}$ la ecuación diferencial (5) se transforma en un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma:

$y'_1 = y_2;$ $y'_2 = y_3;$ $\vdots$ $y'_{n-1} = y_n;$ $y'_n = f(x, y_1, y_2, ..., y_n).$	(6)

Los sistemas de ecuaciones diferenciales también aparecen cuando los problemas propuestos, en el mundo real, requieren la consecución de dos o más funciones incógnitas. Un ejemplo de esto son los sistemas presa–depredador y el sistema climático de LORENTZ. Los sistemas predador-presa se estudian en un capítulo aparte mientras que el sistema de LORENTZ se trata a continuación, después de el ejemplo de cómo convertir una ecuación diferencial ordinaria de orden dos en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden con dos ecuaciones.

Para solucionar sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden se aplican los mismos métodos que para el caso de una sola EDO de primer orden. Para comprender este hecho, en el sistema de EDO de primer orden definido en $x \in [a, b]$:

$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x; y_1, y_2, ..., y_n);$; $i = 1, 2, ..., n$ $(i = 1, 2, ..., \text{n})$	(7)

Con condiciones iniciales: $y_i(x = a) = y_i(a)$, se introduce la siguiente escritura matricial:

Efraín Antonio DOMÍNGUEZ CALLE
Departamento de Ecología y Territorio
Facultad de Estudios Ambientales y Rurales
Pontificia Universidad Javeriana

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} \equiv \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, ..., y_n) \\ f_2(x, y_1, ..., y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, ..., y_n) \end{pmatrix} \equiv \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$$	(8)

El sistema matricial (8) sugiere un algoritmo que aplica n-veces el método numérico elegido (el de Euler o alguno del tipo Runge–Kutta), como se ilustra a continuación:

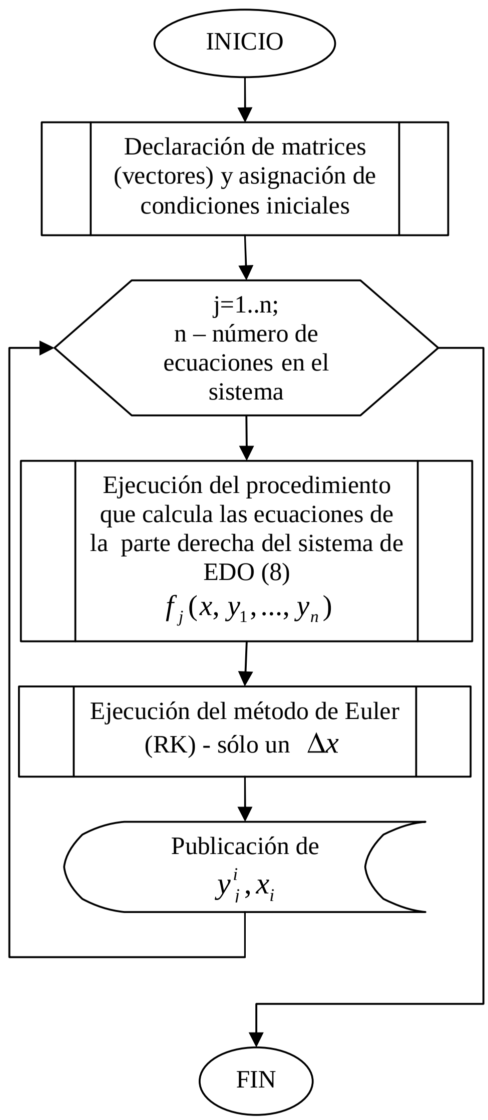

Figura 1. Diagrama de flujo para el algoritmo de solución de sistemas de EDO de primer orden.

Como se observa en la figura 1, el algoritmo de solución de sistemas de EDO de primer orden es bastante genérico, una vez programado el avance para y^i_j, lo único que resta

Efraín Antonio DOMÍNGUEZ CALLE
Departamento de Ecología y Territorio
Facultad de Estudios Ambientales y Rurales
Pontificia Universidad Javeriana

variar, para cada sistema, es el programa que evalúa las expresiones de la parte derecha del sistema (8).

Ejemplo 1: Cómo obtener un sistema de EDO de primer orden a partir de una EDO de segundo orden:

Dada la ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$\theta'' = \frac{3}{2L} = (g - A\omega^2 \operatorname{sen} \omega t) \operatorname{sen} \theta$	(9)

Donde $\theta(t)$ es el ángulo de inclinación de un péndulo en el tiempo t; A, ω y L son parámetros físicos, g es la aceleración en caída libre (gravedad). Las condiciones iniciales de este problema incluyen la posición inicial θ_0 y el valor de la derivada θ' (velocidad) en el momento $t = t_0$.

Para reducir la EDO de segundo orden (8) a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden se introducen dos nuevas funciones incógnitas $y_1(t) = \theta(t)$ y $y_2(t) = \theta'(t)$, para las cuales es valido el sistema:

$y'_1 = y_2;$ $y'_2 = (g - A\omega^2 \operatorname{sen} \omega t) \operatorname{sen} y_1$	(10)

Con condiciones iniciales:

$y_1(t_0) = \theta(t_0);$ $y_2(t_0) = \theta'(t_0).$	(11)

Ejemplo 2: El sistema climático de LORENZ[1]

El sistema de LORENZ fue propuesto como un modelo simplificado para la simulación del clima. Modela la convección en forma de anillos haciendo seguimiento a tres variables:

$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x);$ $\frac{dy}{dt} = rx - y - xz;$ $\frac{dz}{dt} = xy - bz.$	(12)

[1] Colaboradores de Wikipedia. *Caos determinista* [en línea]. Wikipedia, La enciclopedia libre, 2006 [fecha de consulta: 19 de diciembre del 2006]. Disponible en <http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Caos_determinista&oldid=6113777>.

Donde σ es el número de PRANDTL (viscosidad/conductividad térmica), r es el número de RAYLEIGH (John STRUTT) (diferencia de temperatura entre base y tope) y b es la razón entre la longitud y altura del sistema. Las tres magnitudes a las que LORENZ se refiere en su sistema son: x - razón de rotación del viento (velocidad); y - temperatura y anomalía de la temperatura de su valor de equilibrio.

Véase la solución numérica de estos dos ejemplos en los talleres en clase. El atractor de Lorenz, resultante de la solución del sistema de Lorenz se presenta en la figura 2.

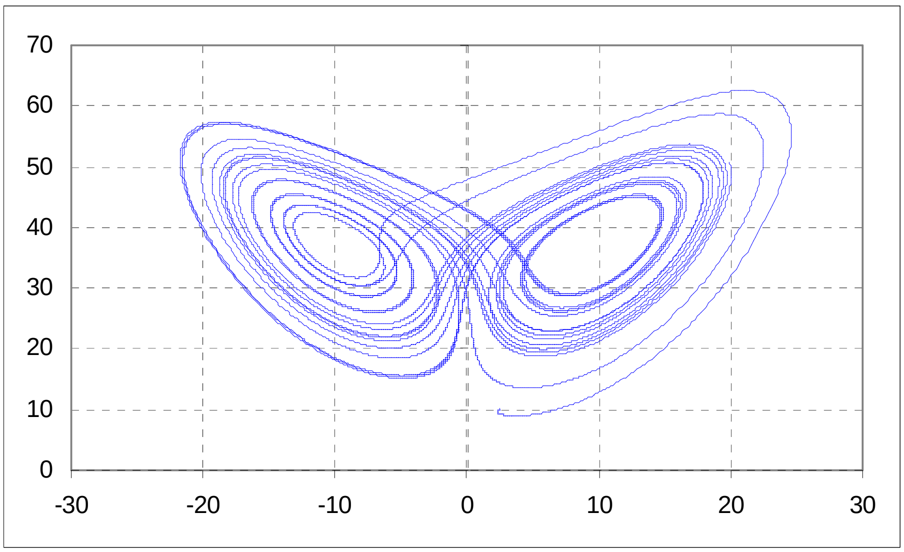

Figura 2. Atractor de Lorenz. http://mathmodelling.googlepages.com/Sol_Sistemas_EDO.xls