MODELACIÓN MATEMÁTICA
Una introducción al método

Profesor: Efraín Antonio DOMÍNGUEZ CALLE, Ph.D.
Página Web: http://mathmodelling.googlepages.com
e-mail: e.dominguez@javeriana.edu.co

REVISIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

INTRODUCCIÓN

Conjuntos

El concepto de conjunto pertenece a las nociones primarias que no se determinan (definen). Las palabras grupo, conglomerado, sistema, colección, son sinónimos de la palabra conjunto. Se puede decir que conjunto es una reunión de elementos determinados que se distinguen uno de otro y que se concibe como una unidad. Ejemplos de conjuntos son: el conjunto de estudiantes de modelación matemática, el grupo de estrellas de la Osa Mayor, la familia de curvas que solucionan una ecuación diferencial, el conjunto de los números enteros.

Los objetos que conforman un conjunto se llaman elementos. Los conjuntos se designan con letras mayúsculas, mientras que sus elementos con letras minúsculas. Si x es elemento del conjunto X, esto se expresa cómo $x \in X$. Si x no es elemento de X entonces se escribe $x \notin X$. Si $x_{1,} x_2, ..., x_n$ son elementos de X, entonces la notación $X = \{x_{1,} x_2, ..., x_n\}$ significa que el conjunto X está constituido por los elementos $x_{1,} x_2, ..., x_n$.

Dados dos conjuntos X y Y. Si X consiste de los mismos elementos que Y se dice que estos conjuntos coinciden. Esta coincidencia se denota como: $X = Y$. Sí X no tienen elementos que no pertenezcan a Y, se dice que X está contenido en Y, o lo que es lo mismo que X es subconjunto de Y, lo que se denota $X \subset Y$ o $Y \supset X$ (Y contiene a X). Sí X no está contenido en Y esto se expresa $X \not\subset Y$. En matemática resulta muy útil la noción de conjunto vacio $\varnothing$. El conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto.

Los números reales

En los cursos de matemática elemental se presenta una definición aproximada de números reales. Esta enuncia que el conjunto de los números reales se compone de números racionales e irracionales. Por racional se entiende un número que puede ser presentado cómo $\frac{p}{q}$, donde p y q son números enteros y además $q \neq 0$. Por su parte un número irracional es aquel que no se puede representar del modo descrito. Los números racionales pueden ser enteros o estar representados por fraccionarios decimales finitos o periódicos infinitos. Los números irracionales, por el contrario, se representan por fraccionarios decimales infinitos. Ejemplos de numeros racionales son: $3/4 = 0.75$;

Efraín Antonio DOMÍNGUEZ CALLE
Departamento de Ecología y Territorio
Facultad de Estudios Ambientales y Rurales
Pontificia Universidad Javeriana

$1/3 = 1.333333...$ Ejemplos de números irracionales son: $\sqrt{2} = 1.41421356...$ y $\pi = 3.14159...$

Puede demostrarse que el conjunto de todos los números racionales es numerable, y que el de los números reales no lo es.

Magnitudes constantes y variables

Al estudiar los fenómenos de la naturaleza usamos magnitudes para describirlos. A cada instante tropezamos con algunas magnitudes que son **constantes** y con otras que son **variables**.

Se llama ***magnitud constante*** a aquella que conserva un mismo valor. Llámese ***magnitud variable*** a la que puede tomar valores numéricos diferentes. Por ejemplo el número π es una magnitud constante, mientras que el saldo de una cuenta bancaria es una magnitud variable. Para generalizar se puede argumentar que una magnitud constantes es una magnitud variable que toma un solo y único valor.

Función

Estudiando un fenómeno cualquiera generalmente se encuentran conjuntos de magnitudes variables ligadas entre sí de tal modo, que los valores de algunas de ellas (variables independientes) determinan por completo los valores de otras magnitudes (variables dependientes o funciones).

Al estudiar un gas, por ejemplo, nos interesa su volumen v, su temperatura t, su presión p. De acuerdo con la ley de Mendeléiev – Clapeyron, conociendo el volumen y la temperatura de un gas, se puede determinar unívocamente su presión; por consiguiente, las magnitudes v y t pueden considerarse como variables independientes y p como una variable dependiente (función).

La noción de función se consolidó en el siglo XVII. Leonhard Euler la explicaba del siguiente modo:

«Si una magnitud depende de otras, de tal modo que cambios en estas últimas condicionen cambios en la primera, entonces se dice que esta primera es función de las últimas».

Leonhard Euler

El concepto de función es igual de importante que el concepto de conjunto. La función es la regla que contrapone al elemento de un conjunto (llamado dominio de definición) un elemento de otro conjunto llamado dominio de existencia (o de imagen, o de significación).

Efraín Antonio DOMÍNGUEZ CALLE
Departamento de Ecología y Territorio
Facultad de Estudios Ambientales y Rurales
Pontificia Universidad Javeriana

De acuerdo con Lobachevski, una variable y es función de otra variable x, si ambas variables están ligadas de tal modo que a cada valor considerado de x (valor admisible) le corresponde un ***valor único totalmente determinado*** de y.

En análisis matemático se introduce cómo sigue:

Sea X un conjunto de números reales x. Sí, según una ley (relación), a todo $x \in X$ se le ha puesto en correspondencia un número real determinado y, se dice que sobre el conjunto X está dada la función y y esto se expresa cómo:

$y = f(x)$ o bien $y = y(x)$, $x \in X$.

La función introducida de esta manera se denomina numérica. Si en vez de conjuntos numéricos se consideran conjuntos de cualquier naturaleza se llega a una definición de función más amplia. Sean M y N dos conjuntos arbitrarios. Se dice que sobre M esta definida una función f, que toma valores de N, si a todo elemento $x \in M$ se le ha puesto en correspondencia un, y solamente un, elemento de N.

Para conjuntos de naturaleza arbitraria (como, también, para conjuntos numéricos), en lugar del término función se usa el término «***aplicación***», hablando de la ***aplicación*** de un conjunto en otro.

Las funciones pueden representarse de forma analítica, gráfica o tabulada.

Noción de función implícita

Una función se llama explícita, si esta dada por una fórmula cuyo segundo miembro no contiene variable dependiente. Por ejemplo la función $y = x^2$ es explícita.

Una función y se llama implícita, si esta dada por una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$, no resuelta respecto de la variable dependiente. Por ejemplo, la función y (para $y > 0$) definida por $x^2 + y^2 = 1$ es implícita.

Ejemplo. Sea que x y y estén vinculados por la ecuación $x^2 + y^3 = 1$. Aquí y es una función implícita de x. Resolviendo esta ecuación a favor de y obtendremos $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$, lo que expresa a la función y en forma explicita. En algunas ocasiones es difícil despejar la ecuación $F(x, y) = 0$ respecto a y. Por ejemplo la ecuación de Kepler $y - \varepsilon \sin y = x$, donde $(0 < \varepsilon < 1)$

Función recíproca

Sea y función del argumento x: $y = f(x)$. Si la estructura de $f(x)$ lo permite, al despejar $y = f(x)$ a favor de x se obtendrá $x = \varphi(y)$ que es la expresión explícita de la función x de argumento y.

Efraín Antonio DOMÍNGUEZ CALLE
Departamento de Ecología y Territorio
Facultad de Estudios Ambientales y Rurales
Pontificia Universidad Javeriana

Clasificación de funciones de un solo argumento

En dependencia de la naturaleza de las operaciones que se deben efectuar sobre el valor del argumento para obtener el valor correspondiente de la función, se establece la siguiente clasificación de las funciones.

1) Si las operaciones a realizar sobre el argumento x y sobre ciertas constantes son adiciones, sustracciones, multiplicaciones, elevaciones a potencias enteras y positivas (un número finito de veces), se obtiene una ***función racional entera*** o ***polinomio algebraico de orden m***. La forma general de esta función es:

$$P(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + ... + a_{m-1} x + a_m \,.$$

2) La función representada en forma del cociente de dos funciones racionales enteras

$$R(x) = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + ... + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + ... + b_{m-1} x + b_m}$$

se llama ***función racional fraccionaría***.

El conjunto de las funciones racionales enteras y fraccionarias forma la clase de las funciones racionales.

3) Si además de las cinco operaciones algebraicas arriba indicadas, se efectúa sobre el argumento x un número finito de extracciones de las raíces, y el resultado obtenido no es una función racional, se obtiene una ***función irracional***. Por ejemplo:

$$f(x) = \sqrt{\frac{5x^2 + 4x - 7}{3x^2 - 8x + 4}} + \left(\sqrt[5]{x} + 1\right)^3 .$$

Aquí por raíz se entiende su valor aritmético.

4) El conjunto de funciones racionales enteras y fraccionarias forma la clase de las ***funciones algebraicas explícitas***. En el caso más general, se llama ***función algebraica*** a la función definida por la ecuación:

$$p_0(x) y^n + p_1(x) y^{n-1} + ... + p_{n-1}(x) y + p_n(x) = 0 \,,$$

donde n es un número entero positivo y los coeficientes $p_0(x),\ p_1(x), ..., p_{n-1}(x),\ p_n(x)$ son funciones racionales enteras de x y el coeficiente $p_n(x)$ no es idénticamente igual a 0. Por ejemplo, la función $y^5 + y - x^2 = 0$ es una función algebraica.

5) Toda función no algebraica se llama función trascendente (trascendental). Las funciones trascendentales más simples son:

a) la función exponencial a^x, donde a es un númer4o distinto de uno;
b) la función logarítmica $\log_a x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$;

Efraín Antonio DOMÍNGUEZ CALLE
Departamento de Ecología y Territorio
Facultad de Estudios Ambientales y Rurales
Pontificia Universidad Javeriana

c) las funciones trigonométricas: $senx$, $\cos x$, tgx, $ctgx$, $\sec x$, $\cos ecx$;
d) las funciones trigonométricas inversas: $arcsenx$, $\arccos x$, $\mathrm{arc}tgx$,
$\mathrm{arc}ctgx$, $\mathrm{arc}\sec x$, $\arccos ecx$.

Las funciones algebraicas, trascendentales elementales y sus combinaciones finitas se llaman ***funciones elementales***.

A continuación se presentan gráficos de las funciones elementales.

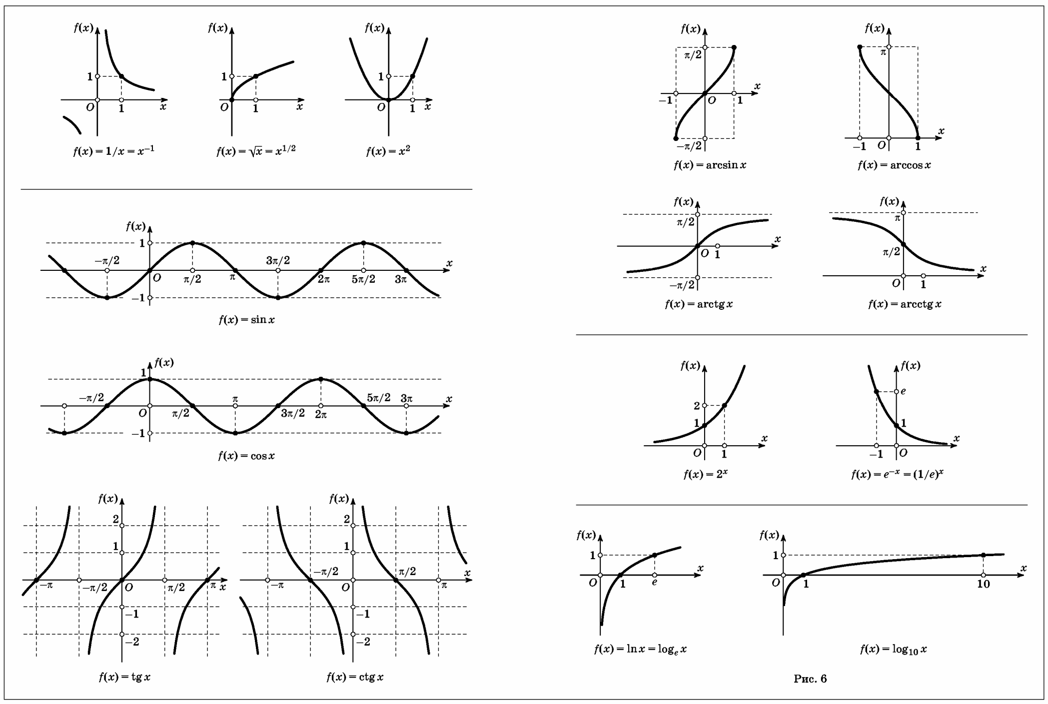

Figura 1. Funciones elementales.

Efraín Antonio DOMÍNGUEZ CALLE
Departamento de Ecología y Territorio
Facultad de Estudios Ambientales y Rurales
Pontificia Universidad Javeriana