MODELACIÓN MATEMÁTICA

Una introducción al método

Profesor: Efraín Antonio DOMÍNGUEZ CALLE, Ph.D.
Página Web: http://mathmodelling.googlepages.com
e-mail: e.dominguez@javeriana.edu.co

INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS NUMÉRICOS PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

A) MÉTODO DE EULER

Dada la Ecuación diferencial ordinaria (EDO):

$F(x, y, y') = 0$	(1)

donde x es la variable independiente, y es la función incógnita y y' su derivada de primer orden. Si $y = f(x)$ es la solución de (1) en el intervalo $[a,b] \in R$ que satisface la condición inicial (de valor inicial)

$y\|_{x=a} = y_0$	(2)

Esta se busca despejando (1) en favor de la derivada $y' = \frac{dy}{dx}$, obteniendo:

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$	(3)

Es evidente que:

$dy = f(x, y)dx$	(4)

Para solucionar (4) se recurre a la sustitución de las diferenciales dy y dx por sus respectivos incrementos (diferencias finitas). El diferencial de la variable independiente es considerado identidad de su incremento $dx = \Delta x$ mientras que el incremento de la función incógnita y su diferencial se relacionan como:

$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$	(5)

Siendo $dy = A\Delta x$, es decir la diferencial de la función incógnita corresponde a la parte lineal del incremento. La porción restante del incremento está dada por una función no lineal del tipo $\alpha(\Delta x)$, que tiende a cero a medida que $\Delta x \to 0$. Por lo anterior durante el reemplazo del incremento de la función incógnita por su incremento (en forma de diferencia finita) se debe validar $\Delta x \to 0$.

Al realizar la sustitución de diferenciales por incrementos en (4) se obtiene que:

$$\Delta y = f(x,y)\Delta x + \eta_i \tag{6}$$

Donde η_i es un error residual que representa la precisión con que la diferencia finita aproxima al diferencial.

Para obtener el algoritmo de cálculo del método de Euler, representando el incremento Δy con la diferencia finita $\Delta y = y_{i+1} - y_1$, se resuelve (6) a favor de y_{i+1} de modo que la ecuación de un paso para estimar la función incógnita en el nodo $i+1$ es:

$$y_{i+1} = y_i + f(x,y)\Delta x + \eta_i \tag{7}$$

Para establecer la magnitud del error η_i en el método de Euler la función incógnita y se aproxima en el intervalo $[a,b] \in R$ a través de series de Taylor de la forma:

$$y_{i+1} = y_i + y'\Delta x + \frac{y''}{2!}\Delta x^2 + \ldots + \frac{y^p}{p!}\Delta x^p + \eta(\Delta x^{p+1}) \tag{8}$$

Aquí $y' = f(x,y)$ (véase ecuación 3), lo que indica que el algoritmo propuesto por Euler (véase ecuación 7) es una serie de Taylor que desprecia los miembros con derivadas mayores a la de primer orden, lo que define su primer orden de precisión.

Ejercicio 1:

Dada la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dy}{dx} = x^3 \tag{9}$$

con condición inicial

$$y_{x=1} = \frac{1}{4} \tag{10}$$

encontrar su solución numérica en el intervalo $x \in [1,12]$ aplicando el método de Euler.

Solución:

El ***primer paso*** consiste en discretizar el intervalo continuo $x \in [1,12]$ para definir una grilla de nodos indexados con la letra i ($i = \{1 \ldots n\}, n \in \mathrm{I}$) en los que se evaluará la función incógnita y. El valor de x en el nodo i será función del valor de i y del incremento Δx.

$$x_i = (i-1) * \Delta x + x_0\ ;\ x_0 = a \text{ dado } x \in [a,b] \tag{11}$$

Efraín Antonio DOMÍNGUEZ CALLE
Departamento de Ecología y Territorio
Facultad de Estudios Ambientales y Rurales
Pontificia Universidad Javeriana

El ***segundo paso*** establece el algoritmo de Euler que corresponde al problema diferencial (9) y (10).

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = x^3\\
&dy = x^3 dx\\
&\textit{se sustituyen diferenciales por incrementos}\\
&\Delta y = x^3 \Delta x + \eta_i\\
&\textit{se sustituyen incrementos por diferencias finitas}\\
&y_{i+1} - y_i = x^3 \Delta x + \eta_i\\
&y_{i+1} = y_i + (x_i^3)\Delta x + \eta_i;\\
&\eta_i \to 0 \text{ si } \Delta x \to 0 \Rightarrow y_{i+1} = y_i + (x_i^3)\Delta x
\end{aligned} \tag{12}$$

El ***tercer paso*** consiste en definir Δx y evaluar, de acuerdo con la ecuación final en (12), y_{i+1} para los nodos $i = \{1 \ldots n\}, n \in \mathrm{I}$, utilizando la condición de valor inicial (10). La solución analítica para el problema diferencial (9) y (10) se deduce por separación de variables:

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = x^3;\\
&\int dy = \int x^3 dx;\\
&y = \frac{x^4}{4} + C.
\end{aligned} \tag{13}$$

Utilizando distintos valores para los incrementos Δx (2.5, 2.0, 1.5, 1.0, 0.5, 0.1 por ejemplo) se puede evaluar el efecto de este en la precisión de la solución para el problema diferencial (9) y (10). Los resultados para cada Δx y la solución analítica se presentan en la gráfica 1.

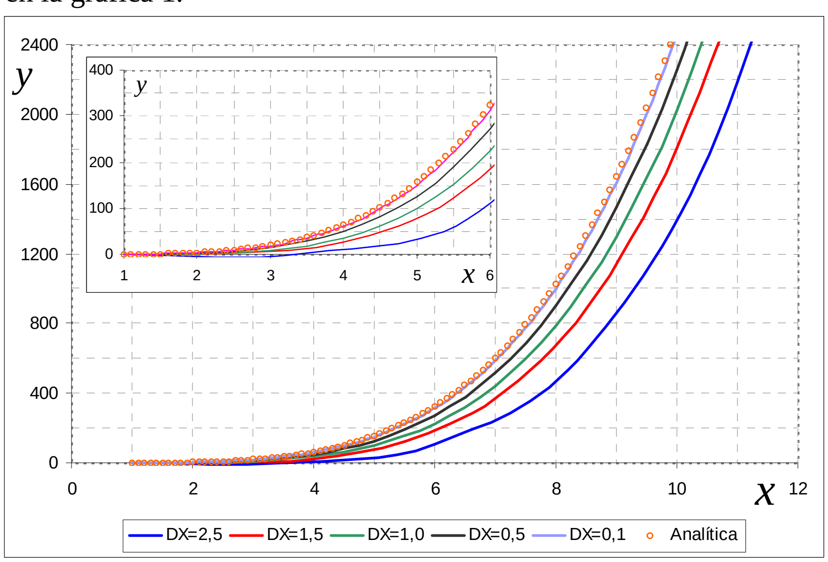

Figura 1. Resultados del método de Euler con diferentes valores para Δx.

Véase también hoja de Excel en http://mathmodelling.googlepages.com/Tallerenclase1-MtododeEuler.xls

Efraín Antonio DOMÍNGUEZ CALLE
Departamento de Ecología y Territorio
Facultad de Estudios Ambientales y Rurales
Pontificia Universidad Javeriana