

MODELACIÓN MATEMÁTICA

Una introducción al método

Profesor: Efraín Antonio DOMÍNGUEZ CALLE, Ph.D.

Página Web: <http://mathmodelling.googlepages.com>

e-mail: e.dominguez@javeriana.edu.co

INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS NUMÉRICOS PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

B) MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

El método de Euler tiene baja precisión en su aproximación de la EDO (1). Se dice que este método tiene baja convergencia ya que para obtener resultados de precisión aceptable Δx debe tender a 0, lo que incrementa el tiempo de cálculo del esquema numérico (7). Para construir esquemas numéricos más precisos es necesario que la parte derecha de (1) sea bastante suave, es decir que tenga derivadas hasta de un orden q donde q es mayor que el orden p de aproximación de la serie de Taylor (8)¹. Para construir esquemas numéricos más precisos la función incógnita puede ser aproximada en el intervalo $[a, b]$ en n - partes con incrementos constantes Δx a través de la serie de Taylor (8). Para ello:

$y' = f(x, y),$ $y = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} y' = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} f(x, y),$ $y'' = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} f(x, y) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} f(x, y) \right) f(x, y),$ <p style="text-align: center;">...</p> $y^{(p)} = \frac{\partial}{\partial x} (y^{(p-1)}) + \frac{\partial}{\partial y} (y^{(p-1)}) f(x, y).$	(14)
--	------

Sí en (14) se desprecia el término residual $\eta(\Delta x^{p+1})$ se puede obtener la siguiente aproximación discreta:

$y_{i+1} = y_i + \Delta x f(x_i, y_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} f(x, y) \right] + \dots +$ $+ \frac{\Delta x^p}{p!} \left[\frac{\partial^{p-1} f(x_i, y_i)}{\partial x^{p-1}} + \dots + \frac{\partial^{p-1} f(x_i, y_i)}{\partial y^{p-1}} f(x_i, y_i) \right]$	(15)
--	------

¹ No todo el tiempo se valida esta condición, razón por la cual los esquemas de menor precisión como el de Euler no pierden su validez.

En la cual, $0 \leq i \leq m-1$, $y|_{x=a} = y_0$. El orden de precisión de esta aproximación es p . Si $p=1$ entonces se obtiene el esquema (7) de orden de precisión 1. A su vez la idea principal de los métodos Runge-Kutta consiste en representar un esquema numérico de la forma:

$y_{i+1} = y_i + \varphi(x_i, y_i, \Delta x)\Delta x + \eta_i$	(16)
--	------

Donde la función $\varphi(x_i, y_i, \Delta x)$ es un polinomio que aproxima (suplanta) la serie de Taylor (8) con orden de precisión p pero que no contiene derivadas de la función $f(x, y)$.

Para el método de Runge-Kutta de segundo orden, la función $\varphi(x_i, y_i, \Delta x)$ se busca en la forma

$\varphi(x_i, y_i, \Delta x) = c_1 f(x, y) + c_2 f(x_i + a_2 \Delta x, y_i + \Delta x b_{21} f(x, y))$	(17)
--	------

Donde los coeficientes c_1, c_2, a_2, b_{21} son constantes, por ahora desconocidas, que se determinan a partir de la comparación de (16) con una serie de Taylor truncada desde la derivada de segundo orden (y''), lo que arroja:

$y_{i+1} = y_i + \Delta x \left[f(x_i, y_i) + \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} f(x, y) \right) \right]$	(18)
---	------

La ecuación (18) es una aproximación con precisión orden 3 que se conoce en algunos textos cómo el *método corregido de Euler*.

Antes de comparar (16) y (18) se puede expresar la parte derecha de (17) cómo una serie de Taylor truncada en las derivadas de orden 2, de modo que:

$\varphi(x_i, y_i, \Delta x) = c_1 f(x, y) + c_2 f(x, y) + c_2 \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x a_2 + c_2 \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta x b_{21} f(x, y) + \eta(\Delta x^2)$	(19)
---	------

Reemplazando (19) en (16) y comparando el resultado con (18) se deduce que:

$c_1 + c_2 = 1,$ $c_2 a_2 = \frac{1}{2},$ $c_2 b_{21} = \frac{1}{2}.$	(20)
---	------

El sistema de ecuaciones (20), tiene tres ecuaciones y cuatro incógnitas tiene como solución $c_1 = 1 - \alpha$, $c_2 = 1 - \alpha$, $a_2 = b_{21} = \frac{1}{2\alpha}$, donde $\alpha \neq 0$. Comúnmente se toma $\alpha = \frac{1}{2}$, lo que permite escribir para el método de Runge–Kutta de orden 2 el siguiente algoritmo:

$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta x}{2}(k_1 + k_2) + \eta_i;$ $k_1 = f(x_i, y_i);$ $k_2 = f(x_i + \Delta x; y_i + \Delta x k_1);$ $\eta_i \rightarrow 0 \text{ si } \Delta x \rightarrow 0;$	(21)
--	------

Para el método de Runge–Kutta de orden p el algoritmo es el siguiente:

$y_{i+1} = y_i + \Delta x \sum_{j=1}^p (c_j k_j) + \eta_i;$ $k_1 = f(x_i + y_i);$ $k_j = f(x_i + \Delta x; y_i + \Delta x \sum_{s=1}^{j-1} b_{js} k_s); \quad 2 \leq j \leq m$ $\eta_i \rightarrow 0 \text{ si } \Delta x \rightarrow 0;$	(22)
---	------

Cuando $p = 4$ se obtiene el método de Runge–Kutta de cuarto orden cuyo algoritmo es cómo sigue:

$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta x}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + \eta_i;$ $k_1 = f(x_i + y_i) =;$ $k_2 = f(x_i + \frac{\Delta x}{2}; y_i + \frac{\Delta x}{2} k_1);$ $k_3 = f(x_i + \frac{\Delta x}{2}; y_i + \frac{\Delta x}{2} k_2);$ $k_4 = f(x_i + \Delta x; y_i + \Delta x k_3) =;$ $\eta_i \rightarrow 0 \text{ si } \Delta x \rightarrow 0;$	(23)
---	------

Ejercicio 2

Dada la EDO:

$\frac{dy}{dx} = x + y$	(24)
-------------------------	------

Con condición inicial

$y_{x=0} = 1;$	(25)
----------------	------

encontrar su solución numérica en el intervalo $x \in [0, 4]$ aplicando los métodos de Euler y Runge–Kutta de orden 2 (RK2) y (RK4).

Solución:

El **primer paso** consiste en discretizar el intervalo continuo $x \in [0, 4]$ para definir una grilla de nodos indexados con la letra i ($i = \{1..n\}, n \in I$) en los que se evaluará la función incógnita y . El valor de x en el nodo i será función del valor de i y del incremento Δx según la ecuación (11).

El **segundo paso** establece los algoritmos de Euler, RK2 y RK4 correspondientes al problema diferencial (24) y (25).

<p><i>Euler</i></p> $y_{i+1} = y_i + (x_{i+1} + y_i)\Delta x + \eta_i;$ $\eta_i \rightarrow 0 \text{ si } \Delta x \rightarrow 0;$	(26)
--	------

<p><i>RK2</i></p> $y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta x}{2}(k_1 + k_2) + \eta_i;$ $k_1 = f(x_i; y_i) = x_i + y_i;$ $k_2 = f(x_i + \Delta x; y_i + \Delta x k_1) = x_{i+1} + y_i + \Delta x k_1;$ $\eta_i \rightarrow 0 \text{ si } \Delta x \rightarrow 0;$	(27)
---	------

<p><i>RK4</i></p> $y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta x}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + \eta_i;$ $k_1 = f(x_i; y_i) = x_i + y_i;$ $k_2 = f(x_i + \frac{\Delta x}{2}; y_i + \frac{\Delta x}{2} k_1) = x_{i+\frac{1}{2}} + y_i + \frac{\Delta x}{2} k_1;$ $k_3 = f(x_i + \frac{\Delta x}{2}; y_i + \frac{\Delta x}{2} k_2) = x_{i+\frac{1}{2}} + y_i + \frac{\Delta x}{2} k_2;$ $k_4 = f(x_i + \Delta x; y_i + \Delta x k_3) = x_{i+1} + y_i + \Delta x k_3;$ $\eta_i \rightarrow 0 \text{ si } \Delta x \rightarrow 0;$	(28)
---	------

El **tercer paso** consiste en definir Δx y evaluar, de acuerdo con las ecuaciones finales en (26), (27), y (28) y_{i+1} para los nodos $i = \{1..n\}, n \in I$, utilizando la condición de valor inicial (25). La solución analítica para este problema puede ser hallada utilizando el método de variación de la constante y es igual a:

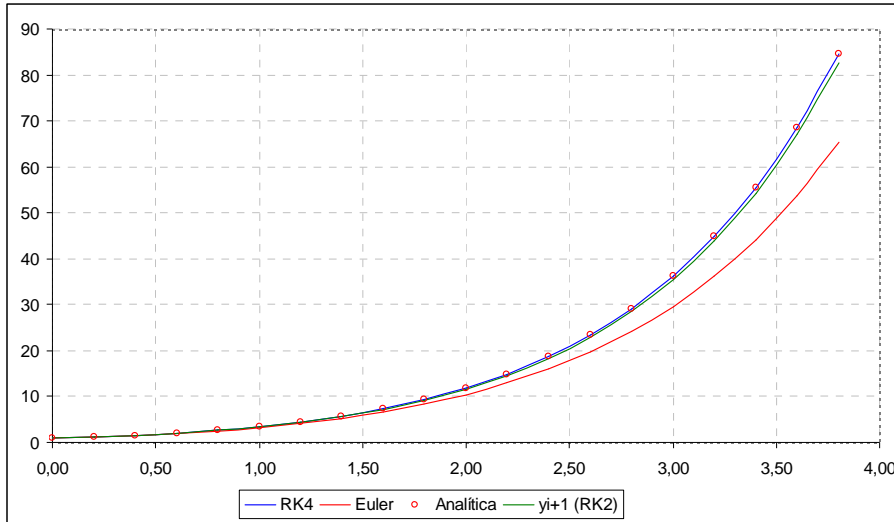


Figura 2. Análisis comparativo de los métodos de Euler, RK2, RK4

$y = 2e^x - x - 1$	(29)
--------------------	------

Utilizando $\Delta x = 0.2$ se puede analizar las diferencias de precisión para la solución numérica obtenida por cada uno de los algoritmos (26), (27), y (28). Los resultados de cada algoritmo versus la solución analítica se presentan en la gráfica 2.

En los siguientes enlaces se puede consultar información adicional sobre la solución del ejercicio 2:

Runge – Kutta orden 2

<http://mathmodelling.googlepages.com/Tallerenclase2-MetodoRK2.xls>

Runge – Kutta orden 4

<http://mathmodelling.googlepages.com/Tallerenclase3-MetodoRK4.xls>