MODELACIÓN MATEMÁTICA

Una introducción al método

Profesor: Efraín Antonio DOMÍNGUEZ CALLE, Ph.D.
Página Web: http://www.mathmodelling.org
e-mail: e.dominguez@javeriana.edu.co

ONDA CINEMÁTICA BIDIMENSIONAL

Ecuaciones de flujo

En la construcción de modelos lluvia – escorrentía bidimensionales, usualmente, se supone que el movimiento del agua ocurre en forma continua formando una delgada lámina de agua que cubre toda el área de la ladera ocupada por la lluvia. Los datos experimentales confirman que esta lámina se presenta en un intervalo de tiempo muy corto y que casi nunca cubre grandes sectores de la ladera en donde precipita el agua. En la realidad el relieve, y el suelo obligan al agua precipitada a formar riachuelos temporales por los que el agua escurre más eficazmente hacia las principales corrientes permanentes que surcan la ladera. No obstante esta discrepancia, los modelos de flujo por ladera son útiles para la simulación de la formación de la escorrentía, de la migración de nutrientes y de la relación atmósfera – suelo – vegetación y su papel en la redistribución de los flujos de agua en la ladera.

La onda cinemática bidimensional es una aproximación al flujo bidimensional (en lámina) de agua en la que se desprecian las fuerzas inerciales, las derivadas espaciales de las profundidades del aguay el efecto dinámico de la lluvia. Este sistema tiene la siguiente estructura:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = \xi ; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = F_x ; \tag{2}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = F_y . \tag{3}$$

Donde h – Profundidad de la lámina de agua;

q_x – caudal elemental en la dirección x;

q_y – caudal elemental en la dirección y;

ξ – Intensidad de los aportes (precipitaciones netas);

$\frac{\partial \eta}{\partial x}$ – pendiente hidráulica en la dirección x;

$\frac{\partial \eta}{\partial y}$ – pendiente hidráulica en la dirección y;

F_x – Componente de las fuerzas de fricción en sentido x;

F_y – Componente de las fuerzas de fricción en sentido y.

Asumiendo que la pendiente hidráulica y la de fondo son iguales $\frac{\partial \eta}{\partial x} = i_x$, $\frac{\partial \eta}{\partial y} = i_y$ y representando las fuerzas de fricción originadas por la superficie de la ladera como:

$$F_x = \frac{1}{\rho h}\tau_x = \frac{u\sqrt{u^2+v^2}}{Ch} = Ch^{3/2}\frac{i_x}{\sqrt{grad\eta}}; \tag{3}$$

$$F_x = \frac{1}{\rho h}\tau_y = \frac{u\sqrt{u^2+v^2}}{Ch} = Ch^{3/2}\frac{i_y}{\sqrt{grad\eta}}; \tag{4}$$

Donde $grad\eta = \sqrt{i_x^2 + i_y^2}$ y u, v son las velocidades del agua en el sentido x y y, τ es el esfuerzo tangencial de corte entre las superficies de fricción en las direcciones x y y. ρ representa la densidad del agua y C al coeficiente de Chezy.

Tomando en cuenta las ecuaciones (3) y (4), la onda cinemática queda expresada como:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = \xi; \tag{5}$$

$$q_x = Ch^{3/2}\frac{i_x}{\sqrt{grad\eta}}; \tag{6}$$

$$q_y = Ch^{3/2}\frac{i_y}{\sqrt{grad\eta}}. \tag{7}$$

Esquemas numéricos

Dominio de modelación

El dominio de modelación esta constituido por la cuenca hidrológica. En este sistema actúan los procesos de precipitación, evaporación del agua desde diferentes superficies (suelo, espejos de agua de reservorios, nieve y otras), transpiración vegetal e infiltración.

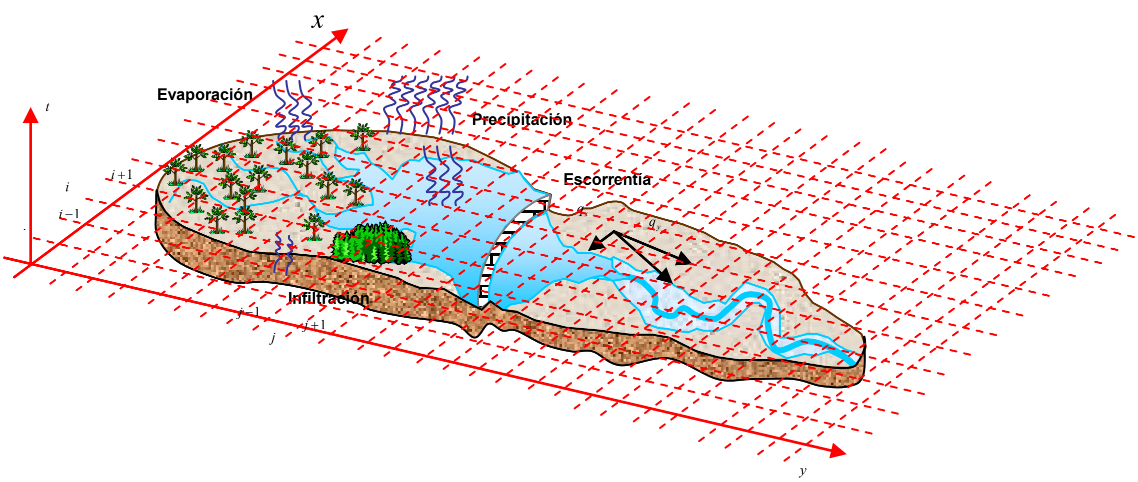

Figura 1. Discretización del dominio espacial

La frontera de este dominio es la línea divisoria de aguas y en los puntos que pertenecen a esta línea (excepto uno de ellos) se puede definir una condición de no flujo.

Las ecuaciones (5, 6 y 7) representan un sistema hiperbólico bastante estudiado en la literatura de métodos numéricos, sin embargo su solución representa un reto importante que puede conducir al fracaso si no se selecciona la aproximación correcta para cada derivada parcial. Cómo en el caso de la onda cinemática unidimensional la utilización de diferencias centrales para la aproximación de las derivadas espaciales puede producir un esquema numérico que se comporta como una ecuación diferencial parabólica, cambiando todo el sentido físico del sistema que se quiere modelar. Para evitar el cambio de sentido físico se pueden utilizar diferencias bidireccionales, en estas las diferenciales se reemplazan con las siguientes diferencias finitas:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h_{i,j}^{k+1} - h_{i,j}^{k}}{\Delta t}; \tag{8}$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} = \frac{k_{dx}(q_{i+1,j}^{k} - q_{i,j}^{k}) + k_{ix}(q_{i,j}^{k} - q_{i-1,j}^{k})}{\Delta x}; \tag{9}$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial y} = \frac{k_{dx}(q_{i,j+1}^{k} - q_{i,j}^{k}) + k_{ix}(q_{i,j}^{k} - q_{i,j-1}^{k})}{\Delta y}. \tag{10}$$

Donde k_{dx} y k_{ix} son coeficientes direccionales cuyas magnitudes se definen cómo $k_{dx} = 0$ y $k_{ix} = 1$ sí $q_x > 0$ y $k_{dx} = 1$ y $k_{ix} = 0$ sí $q_x \le 0$. El caso es análogo en lo referido a q_y. Como resultado se obtiene el siguiente esquema explícito y bidireccional para la onda cinemática bidimensional:

$$\frac{h_{i,j}^{k+1} - h_{i,j}^{k}}{\Delta t} + \frac{k_{dx}(q_{i+1,j}^{k} - q_{i,j}^{k}) + k_{ix}(q_{i,j}^{k} - q_{i-1,j}^{k})}{\Delta x} + \frac{k_{dy}(q_{i,j+1}^{k} - q_{i,j}^{k}) + k_{iy}(q_{i,j}^{k} - q_{i,j-1}^{k})}{\Delta y} = \xi_{i,j}^{k}; \tag{11}$$

El esquema (11) exige cómo condición de estabilidad que:

$$\Delta t \le \min\left(\frac{\Delta x}{\frac{3}{2} C \frac{i_x}{\sqrt{grad\eta}} h^{1/2}} ; \frac{\Delta y}{\frac{3}{2} C \frac{i_y}{\sqrt{grad\eta}} h^{1/2}} \right) \tag{12}$$

Sí $\Delta x = \Delta y$, $C = 50$ y $h = 1$ entonces $\Delta t \approx 0.02\Delta x$.