MODELACIÓN MATEMÁTICA

Una introducción al método

Profesor: Efraín Antonio DOMÍNGUEZ CALLE, Ph.D.
Página Web: http://mathmodelling.googlepages.com
e-mail: e.dominguez@javeriana.edu.co

REVISIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES

A) REGLAS DE DIFERENCIACIÓN:

A continuación se presentan las reglas de diferenciación sin demostración matemática. Para consultar la demostración revise (Kudriatsev y Demidovich: 1989; Aleksandrov y otros: 1994; Krasnov y otros: 1990)[1].

1) Diferenciación de la suma, el producto y el cociente de dos funciones

Teorema 1.

Si las funciones $u = u(x)$ y $v = v(x)$ son diferenciables en el punto x, entonces la suma, el producto y el cociente de estas funciones (bajo la condición de que $v(x) \neq 0$) también son diferenciables. Las reglas de diferenciación para las mencionadas operaciones son las siguientes:

(I)	Diferencial de la suma de funciones	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	(1)
(II)	Diferencial del producto de funciones	$(u.v)' = u'v + uv'$	(2)
(III)	Diferencial del cociente de funcione	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	(3)

2) Diferenciación de una función compuesta (función de una función)

Teorema 2.

Sí la función $x = \varphi((t)$ tiene derivada en el punto t_0, y si para la función $y = f(x)$ existe derivada en el punto $x_0 = \varphi(t_0)$, entonces la función compuesta $f[\varphi(t)]$ también tiene derivada en el punto t_0 y para obtenerla es valida la siguiente fórmula:

$y' = f'(x_0)\varphi'(t_0)$	–		(4)

[1] Kudriatsev V.A., Demidóvich B.P., 1986 (1989): Breve curso de matemáticas superiores. Moscú. Editorial Mir. Páginas 214 – 215.
Aleksandrov A.D., Kolmogorov A.N., Laurentiev M.A. y otros. 1994: La matemática: su contenido, métodos y significado. Tomo 1. Alianza Editorial. Páginas132 – 140.
M. Krasnov, A. Kisiliov, G. Makarenko, E. Shikin. 1990: curso de matemáticas superiores para ingenieros. Tomos 1. Editorial Mir. Moscú. Páginas 354-374

Esta regla es la más difícil de asimilar, el lector que maneje esta regla y tenga a su disposición un conjunto de tablas de derivadas para las funciones elementales puede fácilmente derivar cualquier función compleja. Para aplicar la regla es necesario conocer como está construida la función que deseamos derivar; esto es, qué operaciones debemos realizar sobre la variable dependiente y.

Por ejemplo, para calcular la función $y = sen(x^2)$ es necesario, en primer lugar, elevar x al cuadrado y luego calcular el seno del valor así obtenido. Por lo anterior se puede representar $y = sen(u)$, donde $u = x^2$. Entonces, asimilando la regla del teorema 2, la derivada de y será igual a la derivada de $sen(u)$ multiplicada por la derivada de la función interna u. De modo qué $y' = 2x\cos(x^2)$.

3) Tabla de derivadas de las funciones elementales

y	y'	y	y'	y	y'
$c = const$	0	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	tgx	$\sec^2 x$
x^a	ax^{a-1}	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a x$	$arcsenx$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	$senx$	$\cos x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x \ln a$	$\cos x$	$-senx$	$arctgx$	$\frac{1}{1-x^2}$

Tabla 1. Derivadas de funciones elementales

B) PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

Si la función $F(x)$ es la primitiva de la función $f(x)$ en un intervalo X, entonces la familia (conjunto) de funciones $F(x)+C$, donde C es una constante arbitraria, se denomina integral indefinida de la función $f(x)$ en este intervalo y se representa cómo:

$\int f(x)dx = F(x) + C$	–	(5)

La función $f(x)$ es la función subintegral y $f(x)dx$ es la expresión subintegral, x es la variable de integración. $\int f(x)dx$ representa el conjunto de todas las primitivas de $f(x)$. La determinación de la función primitiva de una derivada dada se llama operación de integración. Para verificar el resultado de la integración basta con volver a derivar la función obtenida como primitiva y constatar su coincidencia con la función subintegral. La integración es la operación inversa a la diferenciación.

1) Propiedades básicas de la integral indefinida.

De la definición de integral indefinida se desprenden las siguientes propiedades:

Efraín Antonio DOMÍNGUEZ CALLE
Departamento de Ecología y Territorio
Facultad de Estudios Ambientales y Rurales
Pontificia Universidad Javeriana

1) La derivada de una integral indefinida es igual a la función subintegral; El diferencial de una función es igual a la expresión subintegral.

$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$	–	(6)
$d\int f(x)dx = f(x)dx$	–	(7)

2) La integral indefinida del diferencial de una función es igual a la suma de esta función con una constante arbitraria.

$\int dF(x) = F(x) + C$	–	(8)

3) Los factores constantes se pueden sacar del signo de la integral indefinida. Si $k = const \neq 0 \Rightarrow$

$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$	–	(9)

2) Tabla de integrales básicas

A continuación se presenta la tabla de integrales básicas. La mayoría de formulas se desprenden de la definición de la operación de integración como operación inversa a a la diferenciación y a la tabla de derivadas de las funciones elementales. La validez de las formulas se puede corroborar aplicando diferenciación a los resultados de las integrales presentadas.

I	$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq 0$	**VIII**	$\int \cos x dx = senx + C$
II	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	**IX**	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
III	$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$	**X**	$\int \frac{dx}{sen^2 x} = -ctgx + C$
IV	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = arcsenx + C$	**XI**	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C, \; a \neq 0$
V	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1$	**XII**	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+k} + C\right\rvert$
VI	$\int e^x dx = e^x + C$	**XIII**	$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$
VII	$\int senxdx = -\cos x + C$	**XIV**	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = arcsen\frac{x}{a} + C$

Efraín Antonio DOMÍNGUEZ CALLE
Departamento de Ecología y Territorio
Facultad de Estudios Ambientales y Rurales
Pontificia Universidad Javeriana