Azar y determinismo en las descripciones matemáticas de la naturaleza. Consideraciones sobre el diagrama de solución de la ecuación logística de Maltus

Por: Efraín Antonio DOMÍNGUEZ CALLE

Ingeniero Hidrólogo

M.Sc. Ecología Hidrometeorológica

Doctor en Ciencias Técnicas

(Hidrología, recursos hídricos e hidroquímica)

Departamento de Ecología y Territorio

Facultad de Estudios Ambientales y Rurales

Pontificia Universidad Javeriana

e-mail: e.dominguez@javeriana.edu.co ; http://mathmodelling.googlepages.com

Uno de los objetivos de la ciencia es conocer las leyes que gobiernan la naturaleza para predecir y gestionar el comportamiento de los procesos que ocurren en el mundo que nos rodea. Las ciencias se pueden dividir en dos grupos:

1) Las que producen conocimiento sobre la así llamada «naturaleza inerte»;
2) Las que estudian la «naturaleza viva».

Cada ciencia utiliza el método científico observación – descripción, clasificación, experimentación – Para el primer grupo es muy característica la aplicación de los métodos matemáticos en su construcción de conocimiento. Para el segundo grupo de ciencias aún esta sin resolver la pregunta ¿es posible describir matemáticamente los entes biológicos como un sistema compuesto de un inmenso número de elementos (moléculas por ejemplo)?

En el siglo XX los biólogos recurrieron a la matemática, abstrayéndose, a través de la ecología, de la compleja realidad de las sociedades de animales y plantas, estudiándolas con el enfoque sistémico. Los ecólogos se apropiaron del arsenal de los físicos para describir el comportamiento de las poblaciones de entes biológicos y su reacción ante las fuerzas externas que experimentan. Estos se tomaron la tarea de describir cuantitativamente los factores que influyen en el estado de las sociedades biológicas. Esta orientación les permitió aplicar los métodos de la modelación matemática en sus ámbitos, anteriormente descriptivos. Los modelos propuestos desde entonces son sólo una débil aproximación de la complejidad del mundo real, sin embargo ofrecen respuestas y soluciones a las preguntas planteadas por la ecología, por lo que tienen un contenido práctico para la humanidad.

La ecología poblacional define a la «población» cómo «un grupo de organismos del mismo tipo», dentro de este grupo los individuos pueden intercambiar información genética. La población ocupa un espacio concreto y funciona como una asociación biótica. Las poblaciones se caracterizan por las siguientes particularidades: el único portador de información es el grupo, no el individuo, La principal cualidad de la población es su densidad, El número de la población se define por dos fenómenos contrarios –la muerte y el nacimiento– Factores externos también influyen en el tamaño de la población. Para construir modelos matemáticos de la dinámica poblacional de una comunidad de organismos se debe tener en cuenta que estos modelos deben contener los mecanismos de funcionamiento del sistema biológico. Las ecuaciones deben expresar cuantitativamente las hipótesis formuladas sobre el proceso ecológico en estudio (natalidad, mortalidad, fuente de alimentos, etc.). También deben ser incluidas las cualidades cinéticas del proceso (velocidad de crecimiento, de reproducción, ciclo de vida e intensidad de interacción). Al sintetizar estos aspectos, el modelo permitirá, cualitativa o cuantitativamente, estudiar la estructura espacio temporal de la evolución del sistema, descubrir las relaciones causa y efecto que lo gobiernan.

A continuación se analiza una población aislada, en la cual los individuos nacen y mueren. Se asume ausencia de depredadores y disponibilidad de alimentos infinita. Los individuos se reproducen periódicamente (por ejemplo con intervalos de un mes, un año). En estas condiciones el tamaño de la población para un instante futuro depende del tamaño de la misma en el instante presente. En el caso más simple el crecimiento poblacional se puede representar con una función lineal: $X_{t+1} = RX_t$, donde X_{t+1} es la población en el momento $t+1$ y X_t la población en el momento actual. R es el coeficiente de crecimiento y representa la relación entre la natalidad y la mortalidad. Con esta ley de crecimiento el tamaño de la población siempre asciende. Para hacer este modelo más real, se debería contemplar que bajo tamaños de población pequeños el crecimiento de esta sucede rápidamente, mientras que al alcanzar poblaciones de tamaño medio este crecimiento se desacelera y al alcanzar poblaciones grandes este crecimiento es casi nulo. Un ejemplo de ello es un enjambre de insectos que ataca un frutal. En un inicio el alimento excede la demanda de la comunidad de insectos y por ello el enjambre se reproduce rápidamente, mientras que al aumentar el número de insectos la relación demanda – oferta de alimentos se vuelve excesiva y la comunidad desaparece por efectos del hambre (se supone que no hay otro frutal). Para tener en cuenta esta dinámica se propone la relación propuesta por Maltus, $X_{t+1} = RX_t(1 - X_t)$. Al igual que en la propuesta inicialr R representa el coeficiente de crecimiento. El nuevo miembro $(1 - X_t)$ controla el crecimiento de la población en ciertos límites dado que cuando X_t crece $(1 - X_t)$ disminuye. Para simplificar el modelo se puede realizar la siguiente abstracción: los valores de X_t recorren el intervalo cerrado de 0 a 1, 0 es la extinción de la población y 1 representa su máximo tamaño. A su vez R estará definido de 0 a 4.

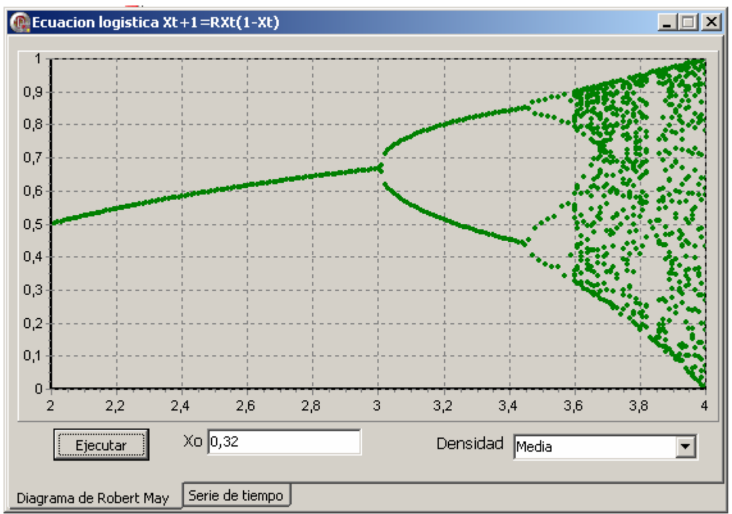

Figura 1. Diagrama de solución de Robert May

Al realizar experimentos numéricos (véase software adjunto) se observa que el modelo de Maltus presenta un comportamiento interesante y dependiente de la magnitud del coeficiente de crecimiento R. Sí $R = 2.6$ el tamaño de la población crece, inicialmente, lentamente para al final acelerar su crecimiento y estabilizarse en un valor estacionario, sin importar las condiciones iniciales. Para $R = 3.2$, después de un crecimiento rápido, se establece un ciclo de oscilaciones entre el valor máximo y mínimo que puede ostentar la población (0.5 – 0.8). Cuando $R = 3.5$, sin importar las condiciones iniciales, la población experimenta una alternancia entre 8 valores (0.30, 0.83, 0.50, 0.88). Finalmente, para R mayores a 3.6 la alternancia de los valores para el tamaño poblacional se torna irregular y en cierto modo impredecible. Si se estudia el comportamiento de la población con respecto a los posibles valores del coeficiente de crecimiento se obtiene el llamado diagrama de solución de la ecuación logística1, este diagrama muestra las posibilidades de bifurcación para la población en dependencia del valor de R y permite ver el dominio de irregularidad al que se traslada el proceso cuando R supera el valor crítico de 3.57. Algunos científicos aseveran con este diagrama la aparición del «azar» en los núcleos de ecuaciones deterministas. Para el autor de las presentes líneas, esta conclusión merece un análisis más profundo dado que tal aseveración contradice la definición de complejidad de Kolmogorov-Chaitin. Sin embargo, los resultados obtenidos con los experimentos numéricos aplicando la ecuación logística de Maltus demuestran qué el comportamiento de sistemas simples puede ser complejo y difícil de predecir. La irregularidad que aparece en la dinámica poblacional descrita por la ecuación logística es inesperada y surge la pregunta sobre sí un sistema real, bajo condiciones criticas, mostrará la misma irregularidad o no. La respuesta a este interrogante no es unívoca, pero cabe destacar que si la irregularidad mostrada en las soluciones de ecuaciones deterministas implementadas en ordenadores con longitud de palabra finita es producto de los errores de truncado es lógico esperar que esta inestabilidad sea remplazada en la naturaleza por la influencia de factores aleatorios no incluidos en la descripción matemática del proceso que se estudia. Al analizar el algoritmo numérico para la generación del diagrama de solución y de las series de tiempo de la dinámica poblacional se encuentra que estas series denominadas como "irregulares" o "aleatorias" están sometidas a un código algorítmico de longitud mucho menor que las series generadas, esto saca a esta supuesta complejidad de la definición de aleatoriedad propuesta por Chaitin y Kolmogorov. De acuerdo con ellos, una secuencia (de palabras, números, elementos) que puede ser descrita por un código, de una máquina universal de Turing, menor que la longitud de la secuencia misma no es una secuencia "aleatoria", por el contrario la secuencia que debe ser reproducida elemento por elemento, por un código de igual longitud que la secuencia si lo es. Los trabajos de Kolmogorov y Chaitin no son los únicos que dan esta definición de aleatoriedad. En su momento Leibniz en su *Discours de métaphysique* presenta sus ideas sobre lo que se puede o no describir matemáticamente, para ello utiliza el ejemplo de una mancha de tinta sobre papel y expresa que seguramente es posible encontrar descripciones matemáticas que expliquen la distribución en el papel de los puntos que componen la mancha (por ejemplo: ahora se conoce que esta descripción se puede hacer con polinomios de Lagrange), concluye además que si la ley que expresa esta distribución "es demasiado compleja" entonces no será una ley valida y la distribución

[1] La ecuación de Maltus es ampliamente conocida con este nombre en el mundo científico

de puntos deberá considerarse aleatoria. Leibniz dejo de lado estas ideas, pero Kolmogorov y Chaitin (quienes desconocían lo dicho por Leibniz) las desarrollaron en sus teorías de complejidad,

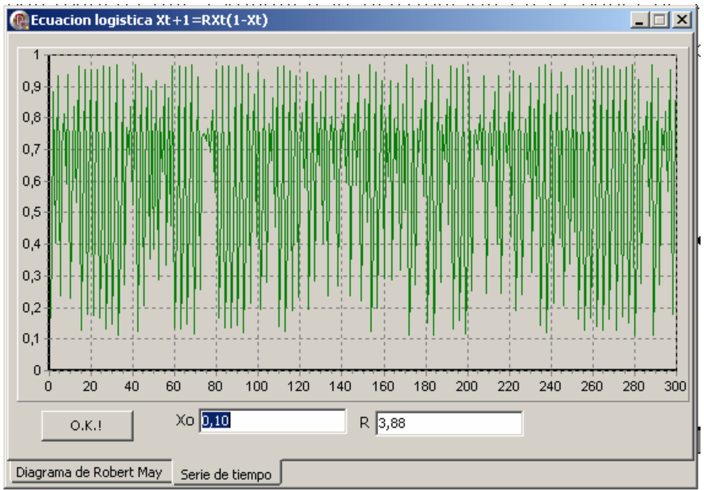

Figura 2. Irregularidad de la dinámica poblacional bajo *R=3,88*

Por otro lado, la artificialidad en la construcción del diagrama de solución de la ecuación logística de Maltus hace pensar en que tales bifurcaciones no son características de la dinámica poblacional. Es difícil imaginar a la población del mundo dando tumbos de un valor aleatorio al otro. Además también es necesario considerar la viabilidad de que un sistema dado alcanzo los valores críticos ($R \geq 3.57$ en este caso). ¿Será posible que el sistema evolucione hacia parámetros de estado críticos en forma inadvertida?

Para concluir, lo expresado no cierra el tema a favor del determinismo, dado que el mismo Chaitin expresa que "Dios no sólo juega a los dados en física, también lo hace en las matemáticas". Los trabajos de Kolmogorov y Chaitin demuestran que existen cadenas incompresibles a códigos de longitud menor que la cadena misma. Este hecho deja latente la posibilidad de que la aleatoriedad sea una característica intrínseca para algunos procesos naturales.

Lecturas Recomendadas:

Gregory J. Chaitin, 2002: Computers, Paradoxes and the Foundations of Mathematics. Some great thinkers of the 20th century have shown that even in the austere world of mathematics, incompleteness and randomness are rife. American Scientist, Volume 90, pp 164-171.

Gregory J. Chaitin, 2004:Leibniz randomness & the halting probability. Mathemathics today. Vol. 40 No 4.

Jhon Allen Paulos, 1991: Más allá de los números. Meditaciones de un matemático. “La teoría del caos”. Metatemas 31. Tusquet Editores, pp 263-269.

Sans les mathématiques on ne pénètre point au fond de la philosophie.
Sans la philosophie on ne pénètre point au fond des mathématiques.
*Sans les deux on ne pénètre au fond de rien. --- **Leibniz***