MODELACIÓN MATEMÁTICA

Una introducción al método
http://www.mathmodelling.org

Autor: Efraín Antonio DOMÍNGUEZ CALLE, Ph.D.
Página Web: http://www.mathmodelling.org
e-mail: edoc@mathmodelling.org
Fecha de actualización: 24 de abril de 2010-04-24
Ciudad: Bogotá - Colombia

TALLER APLICACIONES DE MODELOS MATEMÁTICOS EN ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

1) OBJETIVOS DEL TALLER

Objetivo general

Profundizar en el modelamiento matemático de relaciones predador presas.

Objetivos específicos

- Programar el mapeo de dinámicas poblacionales con la ecuación de Verhulst.
- Programar la interacción predador-presa con el sistema de Lotka-Volterra.
- Analizar la aplicabilidad de sistemas predador – presa en tres dimensiones.

2) MODELOS DE DINÁMICA POBLACIONAL

2.1) LA ECUACIÓN LOGÍSTICA EN DIFERENCIAS FINITAS

A continuación se analiza una población aislada, en la cual los individuos nacen y mueren. Se asume ausencia de predadores y disponibilidad de alimentos infinita. Los individuos se reproducen periódicamente (por ejemplo con intervalos de un mes, un año). En estas condiciones el tamaño de la población para un instante futuro depende del tamaño de la misma en el instante presente. En el caso más simple el crecimiento poblacional se puede representar con una función lineal: $N_{t+1} = RN_t$, donde N_{t+1} es la población en el momento $t+1$ y N_t la población en el momento t. R es el coeficiente de crecimiento y representa la relación entre la natalidad y la mortalidad. Con esta ley de crecimiento el tamaño de la población siempre asciende. Para hacer este modelo más real, se debería contemplar que bajo tamaños de población pequeños el crecimiento de esta sucede rápidamente, mientras que al alcanzar poblaciones de tamaño medio este crecimiento se desacelera y al alcanzar poblaciones grandes este crecimiento es casi nulo. Un ejemplo de ello es un enjambre de insectos que ataca un frutal. En un inicio el alimento excede la demanda de la comunidad de insectos y por ello el enjambre se reproduce rápidamente, mientras que al aumentar el número de insectos la relación demanda – oferta de alimentos se vuelve excesiva y la comunidad desaparece por efectos del hambre (se supone que no hay otro frutal). Para tener en

Profesor: Efraín Domínguez Calle, PhD.
Departamento de Ecología y Territorio
Pontificia Universidad Javeriana

cuenta esta dinámica se propone modificar la relación propuesta por Malthus de la siguiente forma:

$N_{t+1} = RN_t(1-N_t)$	(1)

Al igual que en la propuesta inicial R representa el coeficiente de crecimiento. El nuevo miembro $(1-N_t)$ controla el crecimiento de la población en ciertos límites dado que cuando X_t crece $(1-X_t)$ disminuye. Para simplificar el modelo se puede realizar la siguiente abstracción: los valores de X_t recorren el intervalo cerrado [0, 1], 0 es la extinción de la población y 1 representa su máximo tamaño. A su vez R estará definido de 0 a 4.

Realice las siguientes actividades:

- Simule en Python, mediante la ecuación (1), el crecimiento poblacional de una especie partiendo del valor inicial $N_{t=0} = 0{,}5$ y $R = 1{,}5$. Grafique el resultado. Coméntelo en su reporte escrito.

- Utilizando los valores siguientes

$N_{t=0}$	R
0,2	2,0
0,4	2,5
0,6	2,5
0,8	2,5
0,2	2,98
0,2	3,0
0,2	3,5
0,2	3,6
0,2	3,8
0,2	3,99

Analice los cambios en el comportamiento de la función logística y coméntelos en su reporte escrito analizando patrones de comportamientos cíclicos, recurrentes e irregulares. Soporte su reporte con los diagramas construidos en Python.

Profesor: Efraín Domínguez Calle, PhD.
Departamento de Ecología y Territorio
Pontificia Universidad Javeriana

2.2) MODELO PREDADOR-PRESA (VARIANTE SIMPLE)[1]

A continuación se analiza la convivencia de dos especies que interactúan de la forma predador – presa. El modelo matemático para simular el comportamiento de estos sistemas por primera vez fue propuesto por A. Lotka en 1925. Un poco mas tarde V. Volterra (1926) presentó un modelo parecido al de Lotka y otras variantes más complejas del mismo.

Suponga que existen dos especies del tipo predador presa, que habitan en un entorno aislado y que además el medio le proporciona a la especie presa "x" alimentación infinita, mientras que la especie predador "y" se alimenta sólo de la especie x. El estado del este sistema se define por la evolución del vector (x, y). Si $\frac{dx}{dt}$ es la velocidad de cambio de la población presa, en ausencia de predadores x aumentará en proporción a sus tazas de natalidad n_x y mortalidad m_x que definen el coeficiente de crecimiento poblacional $k_x = n_x - m_x$. En conclusión $\frac{dx}{dt} \sim k_x x$. Por su parte la población de predadores tendrá una taza de crecimiento dependiente de la población de presas. Si no hay presas disponibles la población de predadores disminuye, lo que indica que $\frac{dy}{dt} \sim -k_y y$ donde n_y y m_y definen el coeficiente de crecimiento poblacional de los predadores $k_y = n_y - m_y$. En este sistema los cambios de población (x, y) también son proporcionales entre si, de modo que la presencia de predadores "y" disminuye la población de presas "x" y por el contrario la presencia de presas favorece el crecimiento de la población de predadores. Para expresar estos hechos es necesario añadir los términos $-k_1 xy$ y $k_2 xy$ que corrigen las tazas de crecimiento de presas y predadores. El coeficiente k_1 representa el perjuicio recibido por la población x cada vez que interactúa con la población "y". k_2 representa el beneficio recibido por este mismo efecto por parte de la población de predadores. Finalmente se obtiene:

$\frac{dx}{dt} = k_x x - k_1 xy$ $\frac{dy}{dt} = k_2 xy - k_y y$	(2)

Realice las siguientes actividades:

[1] Los sistemas predador presa también pueden ser vistos cómo sistemas consumidor – recurso (Vandermeer & Goldberg, 2003).

Profesor: Efraín Domínguez Calle, PhD.
Departamento de Ecología y Territorio
Pontificia Universidad Javeriana

- Adapte el programa construido en clase para solucionar sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias para solucionar el sistema de la ecuación (2). Utilice h=0.01 y xmin=0, xmax=140

- Aplique el programa predador – presa con la siguiente información:

$k_x = 0{,}1$
$k_y = 0{,}5$
$k_1 = 1{,}0$
$k_2 = 2{,}0$
$x_{t=0} = 0{,}8$
$y_{t=0} = 0{,}06$

Grafique la evolución en el tiempo de los dos poblaciones y comente en su reporte la evolución de las dos especies. Construya el grafico x versus y (Diagrama de fase del sistema predador – presa). Comente lo observado en el diagrama de fase.

2.3 MODELO TRI-DIMENSIONAL PREDADOR-PRESA (2 PREDADORES UNA PRESA)

La dinámica de dos predadores (x, y) contra una presa (z) puede ser descrita cómo:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mathrm{x}\big((1-\mathrm{x})(1+\mathrm{ax})(1+\mathrm{bx}+\mathrm{cy})-\mathrm{y}(1+\mathrm{bx}+\mathrm{cy})-\mathrm{z}(1+\mathrm{ax})\big) \\ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} &= \mathrm{y}[\mathrm{qx}(1+\mathrm{bx}+\mathrm{cy})-\mathrm{f}(1+\mathrm{ax})(1+\mathrm{bx}+\mathrm{cy})-\mathrm{gz}(1+\mathrm{ax})] \\ \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}} &= \mathrm{z}[(\mathrm{wx}+\mathrm{ly})(1+\mathrm{ax})-\mathrm{m}(1+\mathrm{ax})(1+\mathrm{bx}+\mathrm{cy})] \end{aligned} \tag{3}$$

Con condiciones iniciales: $x_{t=0} = 0.1$; $y_{t=0} = 0.5$; $z_{t=0} = 1.5$; para el intervalo de solución $[t_{min} = 0 : t_{max} = 500]$; y paso de solución $dt = 0.1$, con parámetros a=1.5; b=5.0; c=8.0; q=1.0; f=0.16; g=0.1; w=1.1; l=2; m=0.16. Tenga en cuenta que en esta lista "f" es un parámetro más, (no olvide cambiar corchetes cuadrados por paréntesis).

3) DESARROLLO DEL TALLER

- Documéntese sobre los sistemas para la simulación de interacciones predador – presa y prepare la parte teórica del taller con base en ello. (No es suficiente lo

Profesor: Efraín Domínguez Calle, PhD.
Departamento de Ecología y Territorio
Pontificia Universidad Javeriana

descrito en la guía de este taller). Esto debe estar soportado en artículos científicos y libros reconocidos.

- Construya un programa en python para mostrar la dinámica que define la ecuación 1 y que calcule y grafique su diagrama de bifurcación correspondiente a la ecuación 1.

- Analice las deficiencias del modelo propuesto en este taller para el sistema predador – presa y proponga los componentes que deberían adicionársele.

- Describa las relaciones entre poblaciones de distinta especie que pueden ser descritas con sistemas análogos al descrito por la ecuación 2.

- Transforme el programa desarrollado en clase para resolver el sistema de la ecuación (3).

- Documente dos ejemplos de posible aplicación para el sistema predador presa tridimensional.

- Explore y determine en que diapasón de coeficientes la solución del sistema predador – presa mantiene su carácter cíclico.

- En qué consiste el problema de sensibilidad a las condiciones iniciales y precisión de parámetros.

4) RECOMENDACIONES PARA EL REPORTE ESCRITO

- Se debe anexar el texto del programa con el código comentado.
- Pueden confrontar los resultados de su programa en Python con la aplicación disponible[2] en la página del curso: Programa Mapeo Ecuación de Verhulst.

  Esta aplicación también contiene un ejemplo del diagrama de bifurcación de la ecuación 1.

- Las gráficas deben estar formateadas según el ejemplo que se presenta adelante.

[2] Esta aplicación permite ampliar la gráfica al seleccionar el sector de interés sosteniendo oprimido el botón izquierdo del ratón y arrastrar el cursor hacia abajo a la izquierda. Al arrastre al contrario devuelve la gráfica a su tamaño normal.

- Los trabajos que vayan más allá de lo requerido en el taller obtendrán bonos de calificación si el profesor lo considera pertinente.

- El informe debe tener conclusiones y bibliografía.

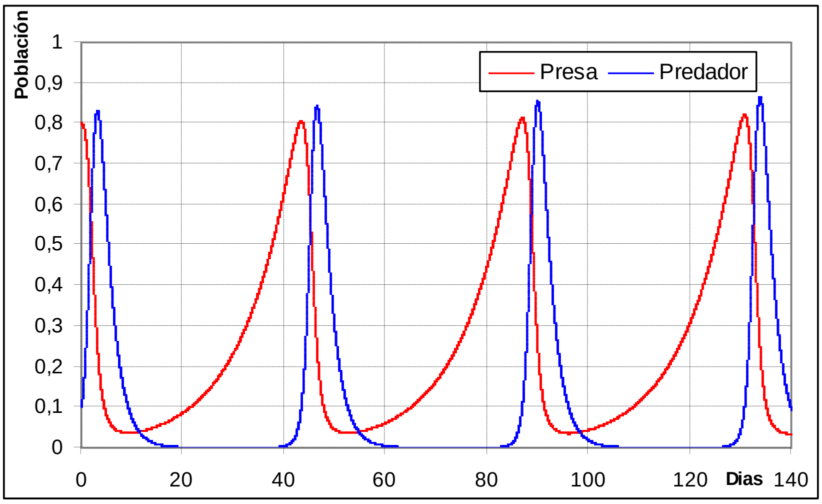

Figura 1. Ejemplo del formato de gráficas

5) BIBLIOGRAFÍA

Vandermeer John H., Goldberg Deborah E. 2003: *Population Ecology: First principles*. New Jersey. Princenton University Press. PP 1 – 20, 120 – 150.

Ramirez A., 2005: *Ecología aplicada: diseño y análisis estadístico*. Bogotá D.C. Fundación Universidad Jorge Tadeo Lozano. PP 1 – 37.

Seijo J.C., Defeo O., Salas S., 1997: *Bioeconomía pesquera – teoría, modelación y manejo.* Roma. FAO Documento Técnico de pesca 3681. 90 p. http://www.fao.org/docrep/003/w6914s/w6914s00.htm

Profesor: Efraín Domínguez Calle, PhD.
Departamento de Ecología y Territorio
Pontificia Universidad Javeriana